数理計画法（数理最適化）第10回

ネットワーク最適化
最小費用流問題と負閉路消去アルゴリズム

担当:　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

最小費用流問題

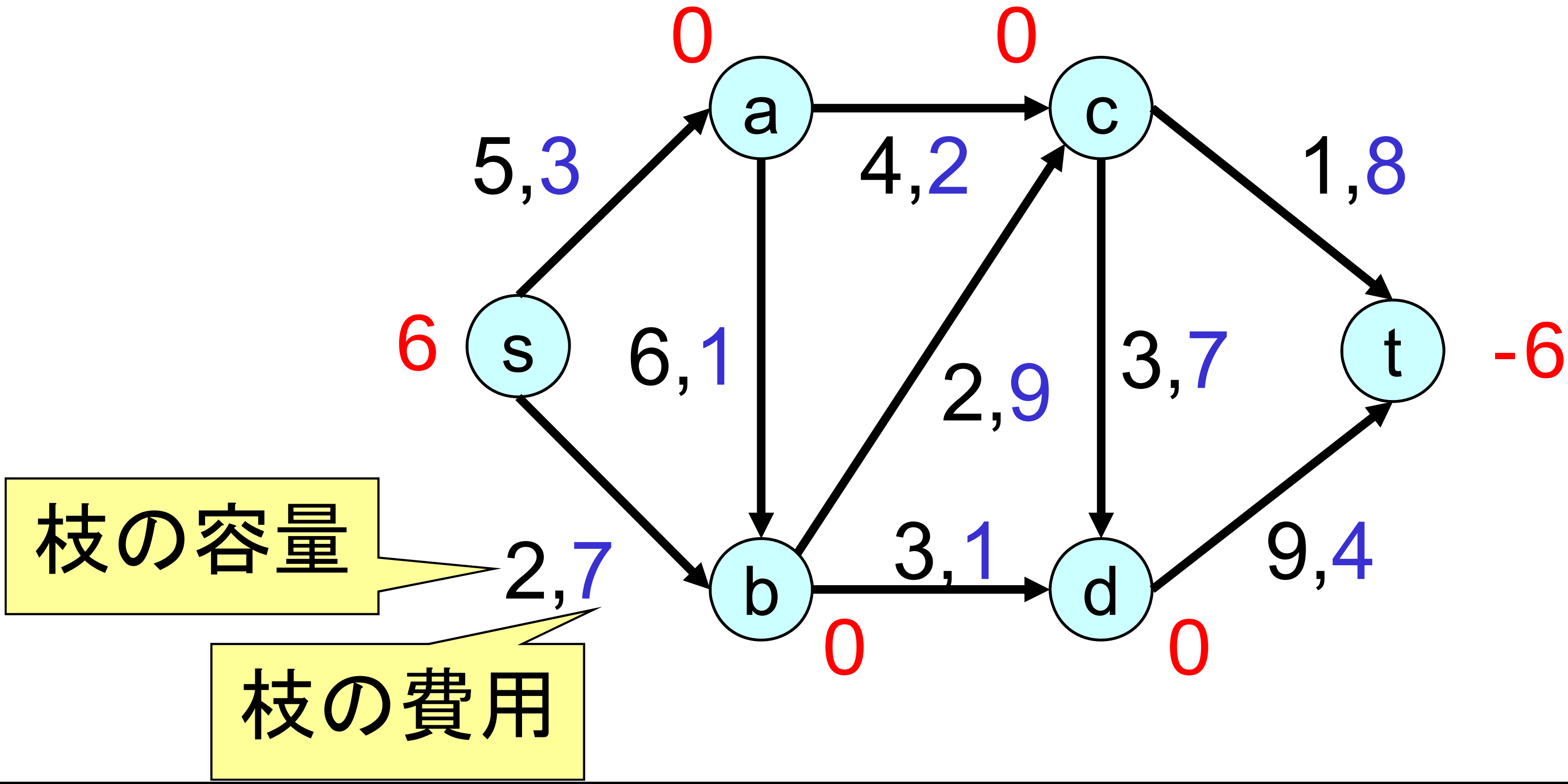
入力：有向グラフ G = (V, E)

各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

(b_i >0➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

各枝 (i, j) ∈ E の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題：定式化

目的: 最小化　$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

（各枝の費用×フロー量）の和

条件　$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

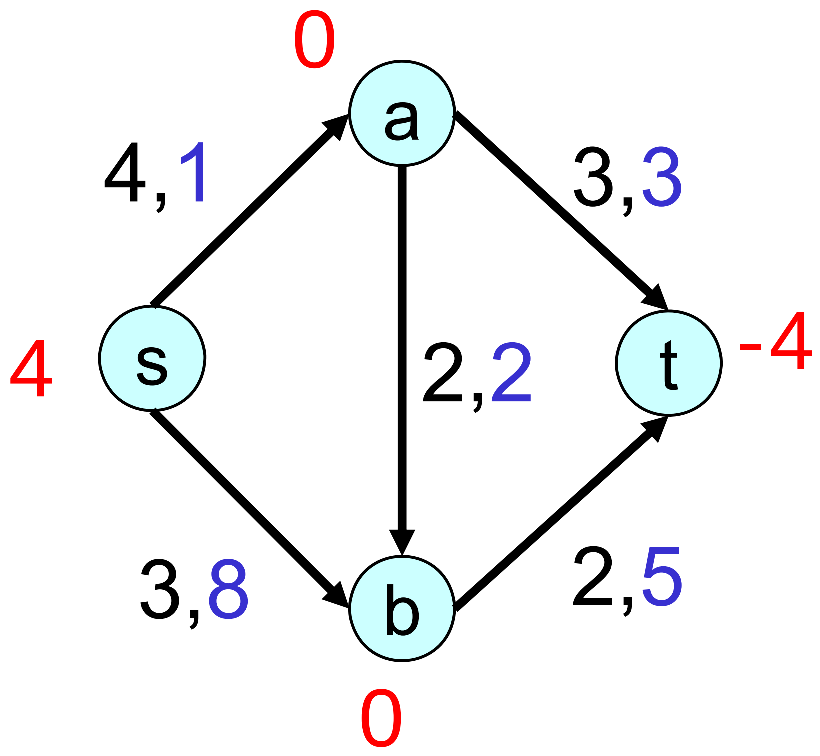
各枝の容量条件

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る枝$\}$
$- \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る枝$\} = b_i \quad (k \in V)$

各頂点での流量保存条件（需要供給量に関する条件）

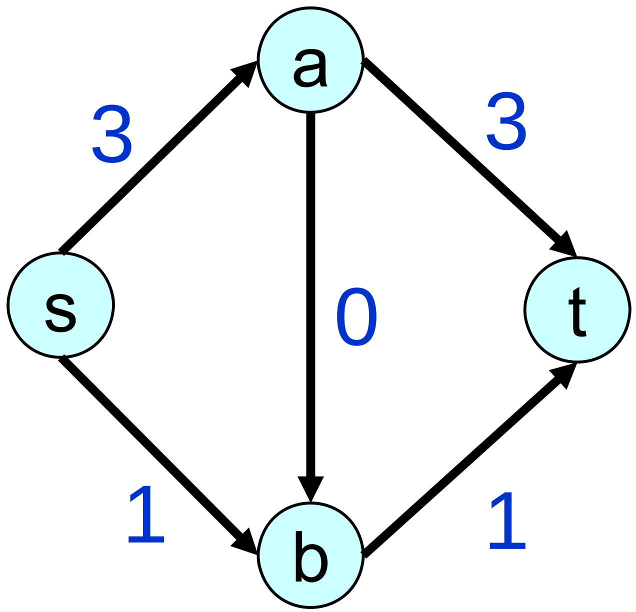
これも線形計画問題

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

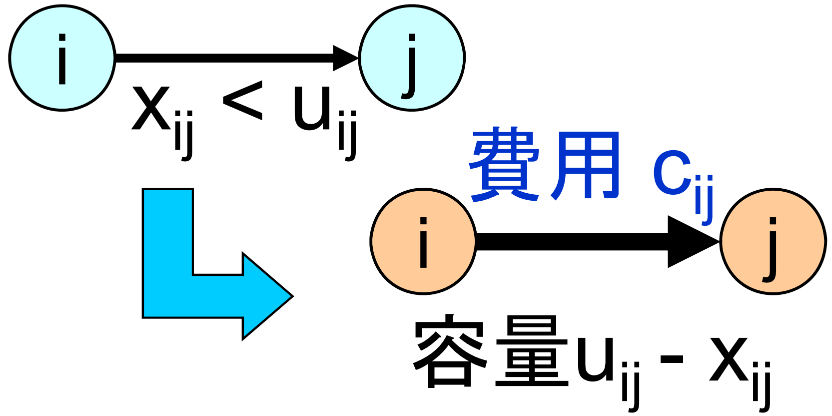
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

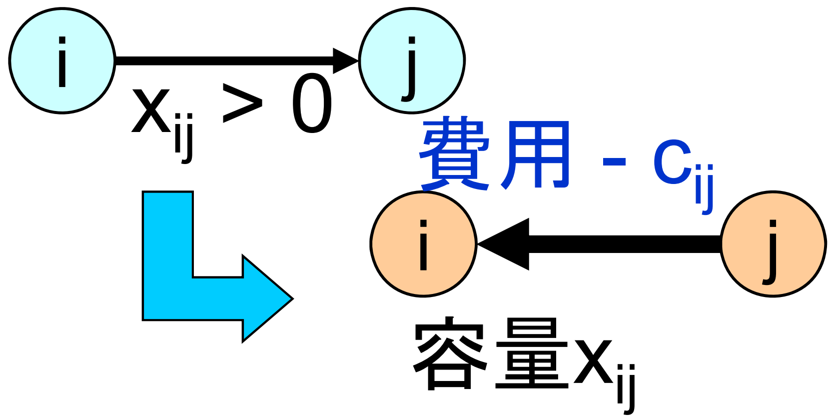
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



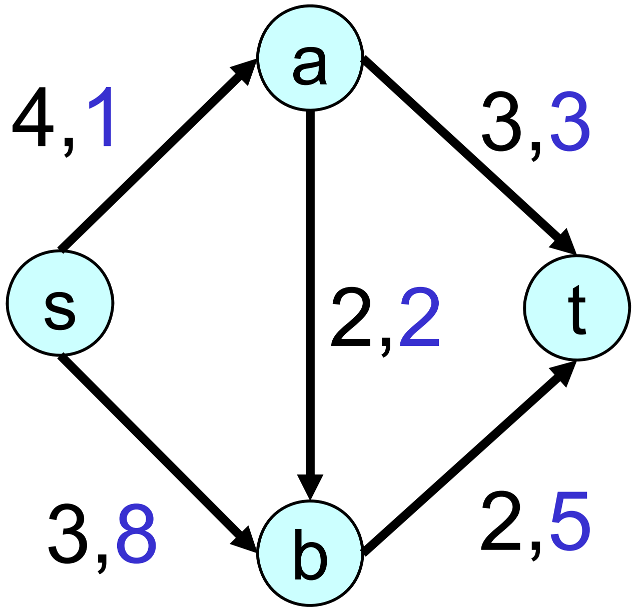
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

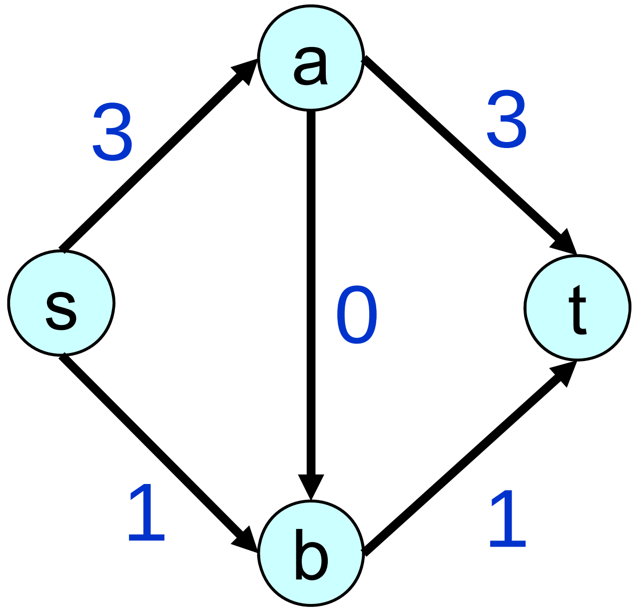
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $-c_{ij}$



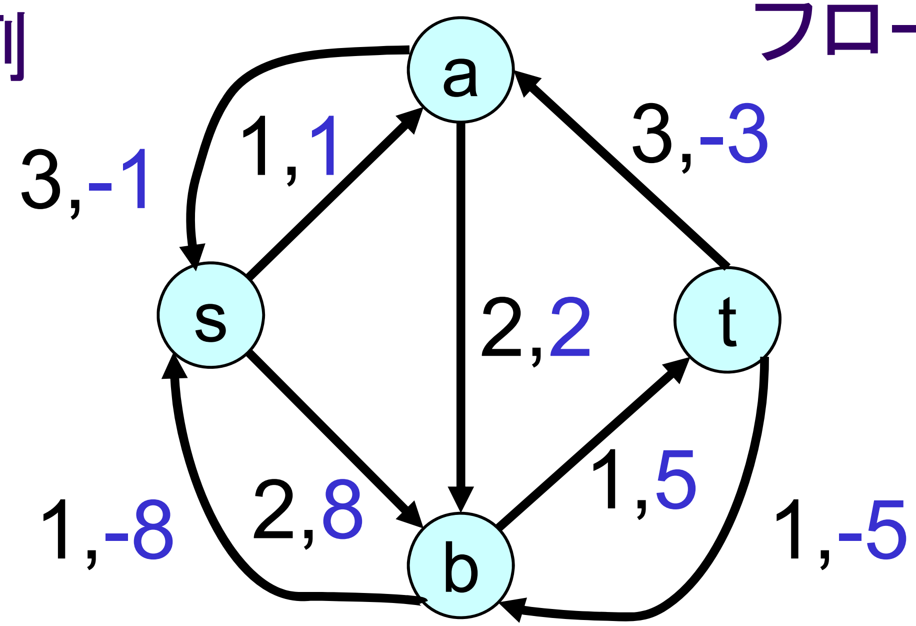
残余ネットワークの作り方（その2）



問題例



フローの例



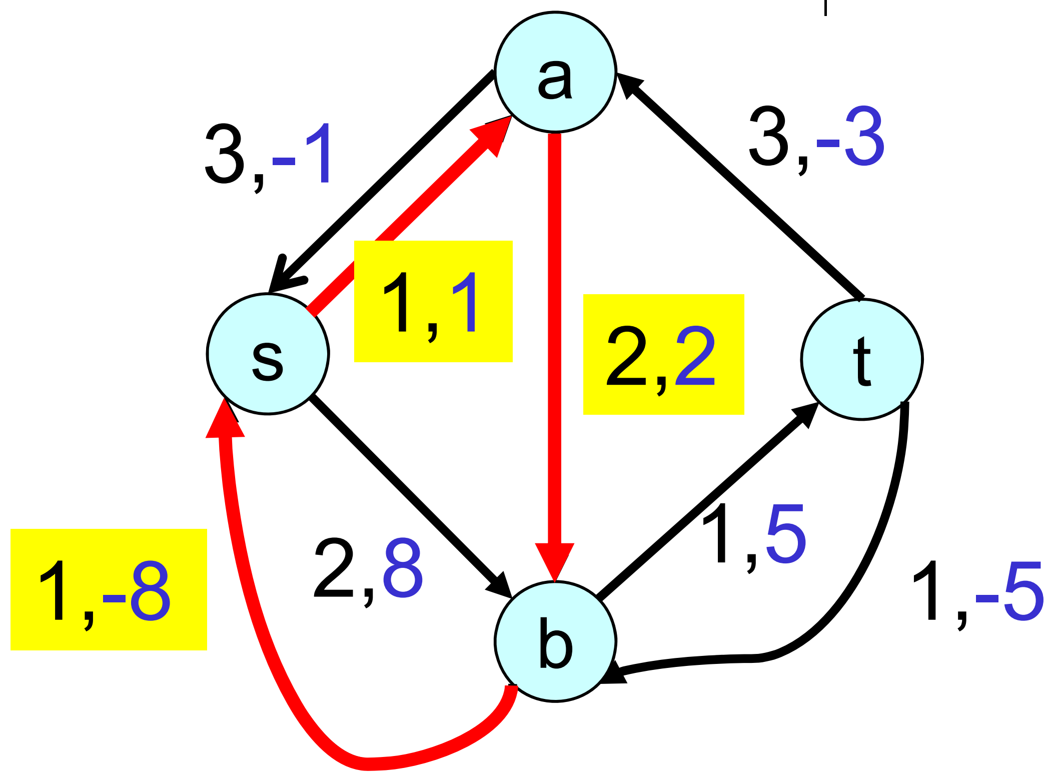
残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(1)

残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5

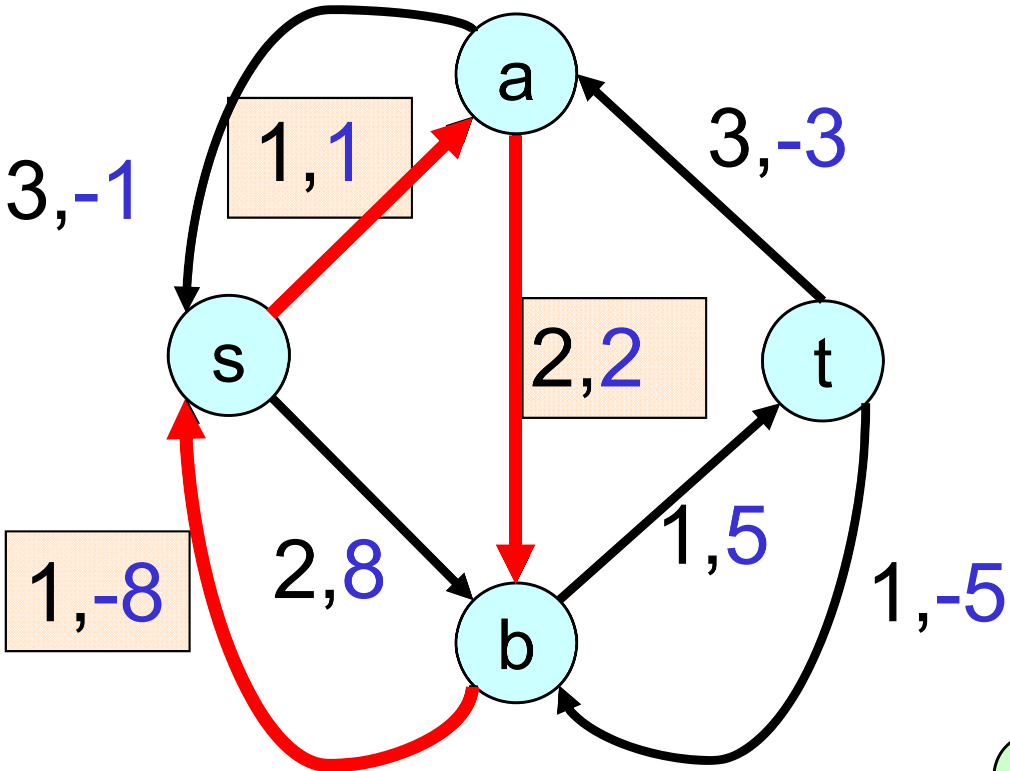


定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

定理1の証明の概略

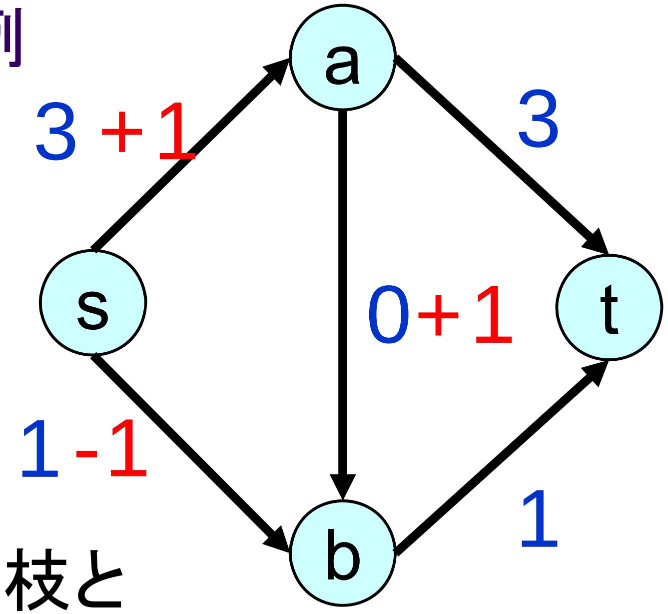
費用が負の閉路を用いて，フローの費用を減少できる

残余ネットワーク



閉路の容量α=1
閉路の費用γ=−5

フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋α
逆の向き⇒フロー値に−α
無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は
$\alpha\gamma$（＝−5）変化
（より費用の小さいフローを得る）

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

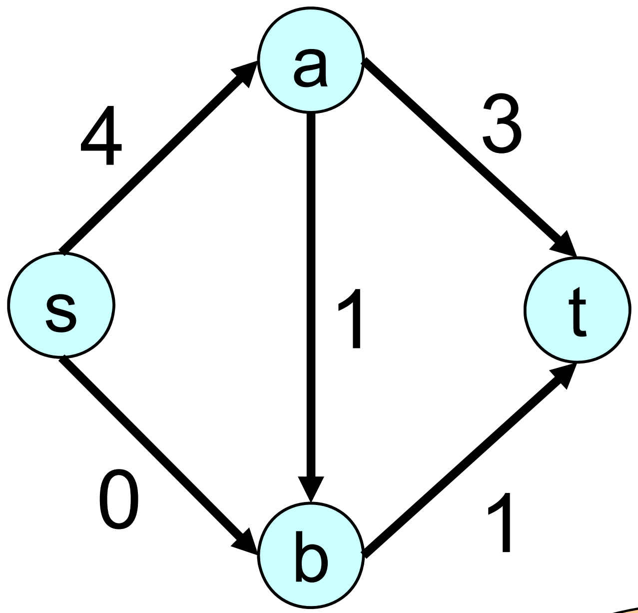
定理1：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

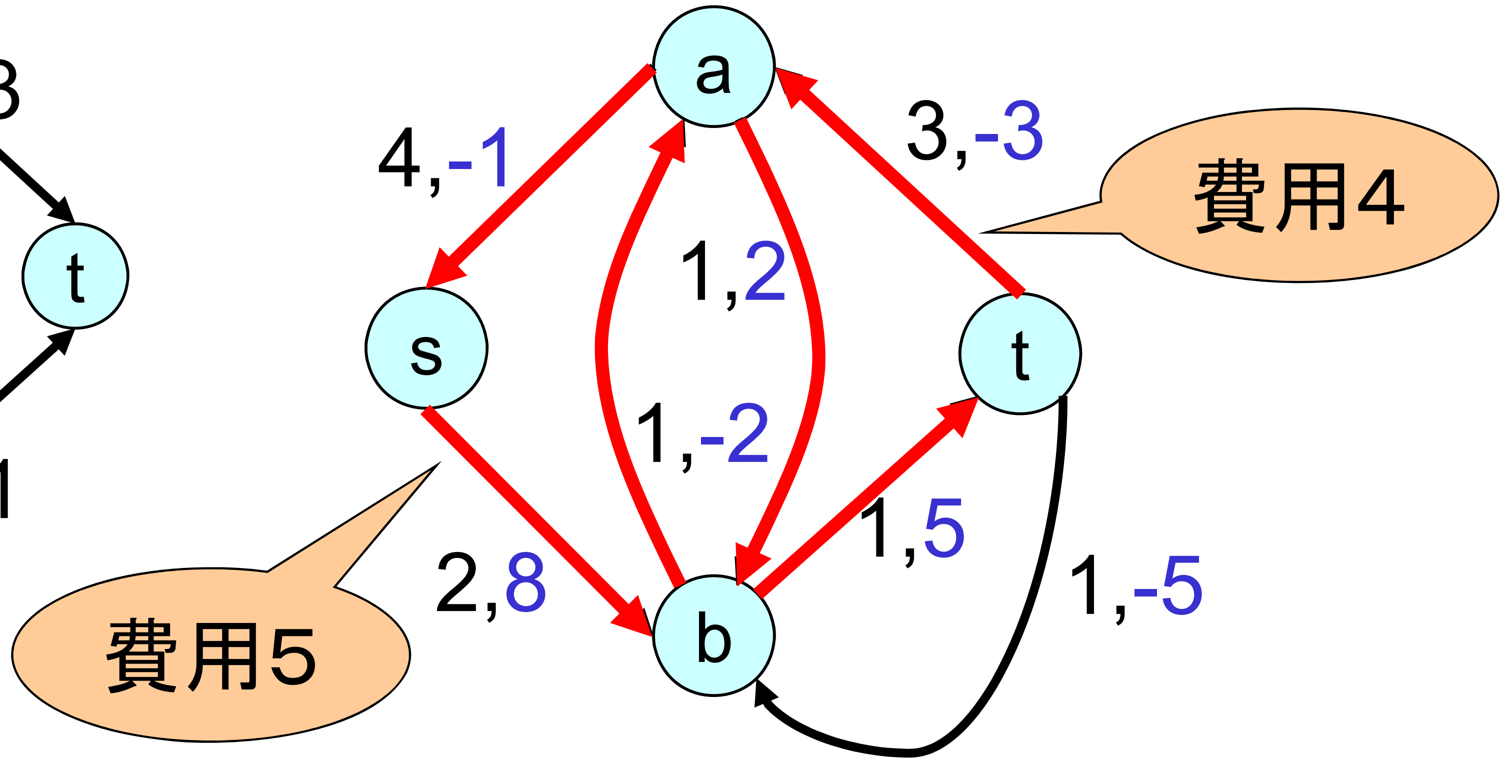
実は、逆も成り立つ(証明は省略)

定理2：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー　　　　残余ネットワーク





費用が負の閉路がない

⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて，需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

負閉路消去アルゴリズムの計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定
U = 枝容量の最大値，
C = 枝費用の絶対値の最大値
m = 枝の数， n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU
  ➔ 反復回数 ≦ 2mCU

- 各反復での計算時間
  ＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間

➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は $O(m^2 n C U)$
（入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間）

負閉路消去アルゴリズムの改良

負閉路消去アルゴリズムの反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

（改良法１） 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
反復回数 O(m log (n U))
ただし，費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
➔ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

（改良法２）
“（閉路の費用）／（閉路の枝数）”が最小の負閉路を選ぶ
反復回数 $O(n\,m^2 \log n)$，一回の反復 O(n m)

※この他にも，負閉路消去アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

最小費用流問題の応用例:研究室配属問題

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

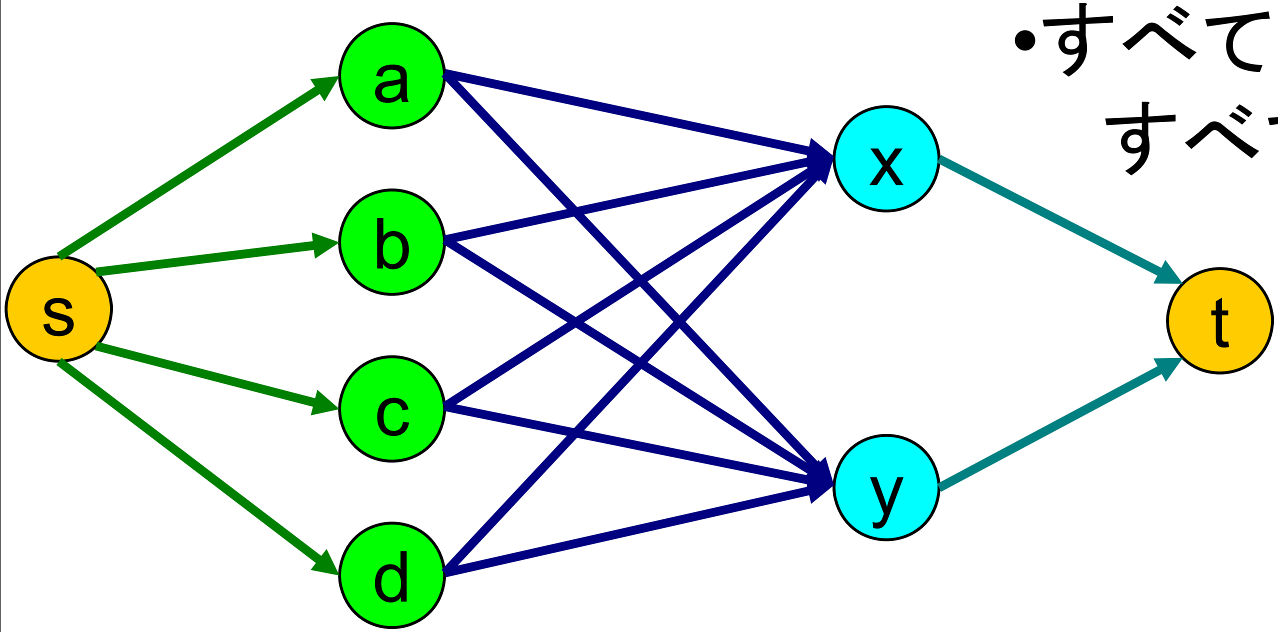
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例:研究室配属問題

最小費用流問題に変形

- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d（通過点）
- 各研究室に対応する頂点 x, y（通過点）
- 供給点 s, 需要点 t

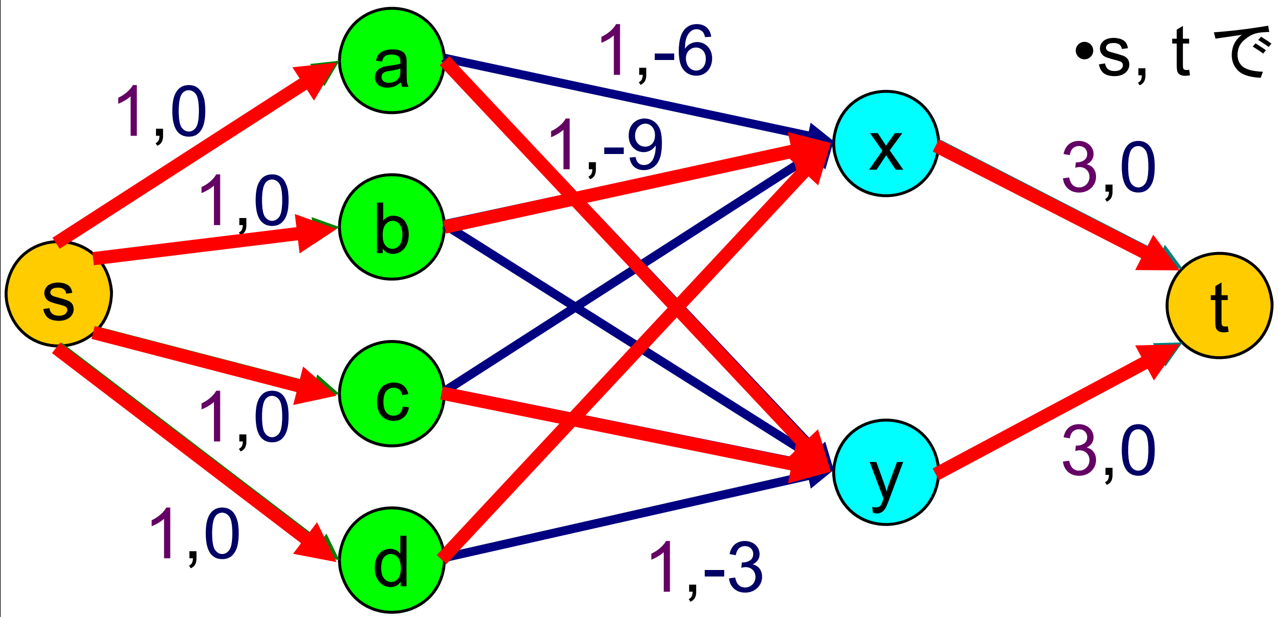
- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)



- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例:研究室配属問題

•供給点から学生頂点への枝:容量1、費用0
•研究室頂点から需要点への枝:容量＝研究室の定員、費用0
•学生頂点から研究室頂点への枝:容量1、費用＝(－1)×満足度



•s, t での需要(供給)量＝学生数

学生B,D→X研究室

学生A,C→Y研究室

この問題の(整数値)フロー⇔定員を満たす配属方法
フローの費用⇔(－1)×学生の満足度の合計

∴最小費用流問題に変形できた

他のネットワーク最適化問題との関係

- 最短路問題
- 最大流問題

これらの問題は最小費用流問題に変換可能

（最小費用流問題の特殊ケース）

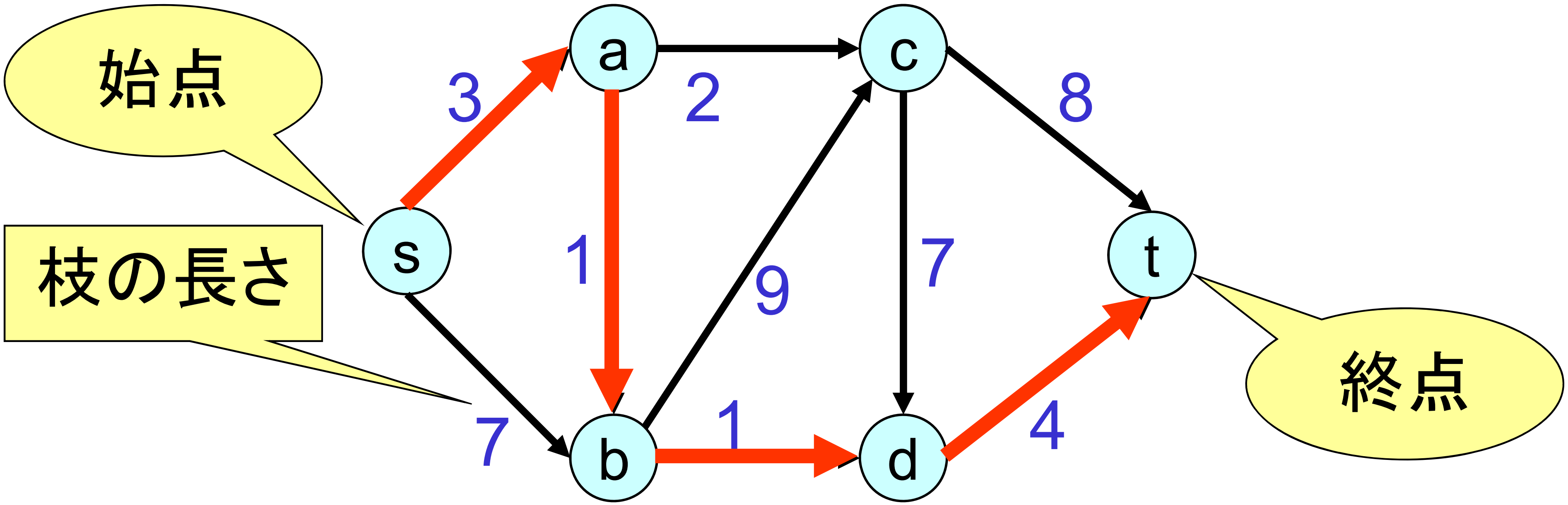
最短路問題との関係

最短路問題の定義

入力 : 有向グラフ G = (V, E)

　　始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$, 各枝 $(i, j) \in E$ の長さ c_{ij}

出力 : s から t までの長さ最短のパス



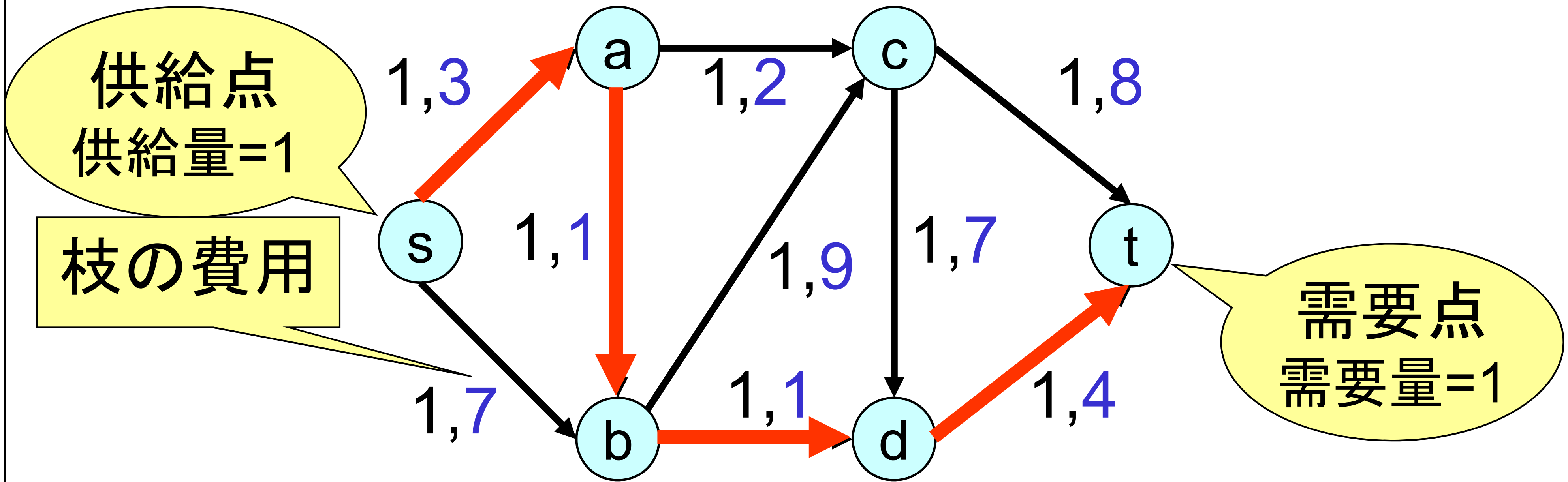
最短パス 長さ 9

最短路問題との関係

最短路問題から最小費用流問題への変換

始点➔供給点，終点➔需要点，需要(供給)量＝1

枝の長さ➔枝の費用，各枝の容量＝1



最小費用(整数)フローを求める

➔ 最短 s-t パスを流れるフローになる

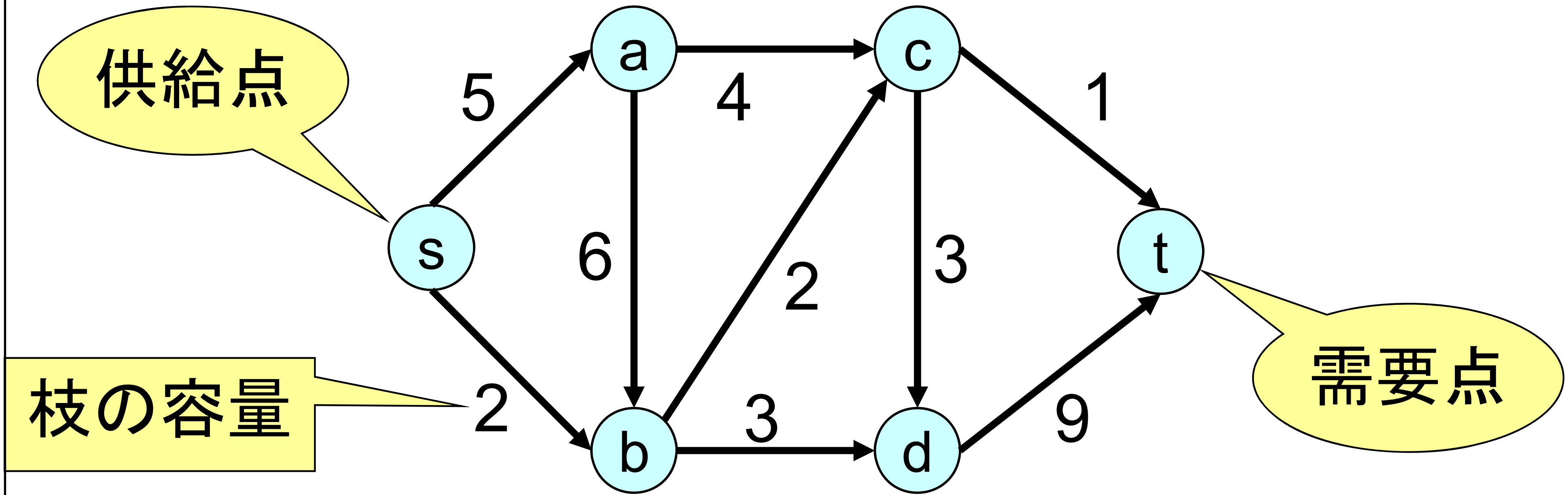
最大流問題との関係

入力 : 有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$

出力 : フロー値が最大のフロー



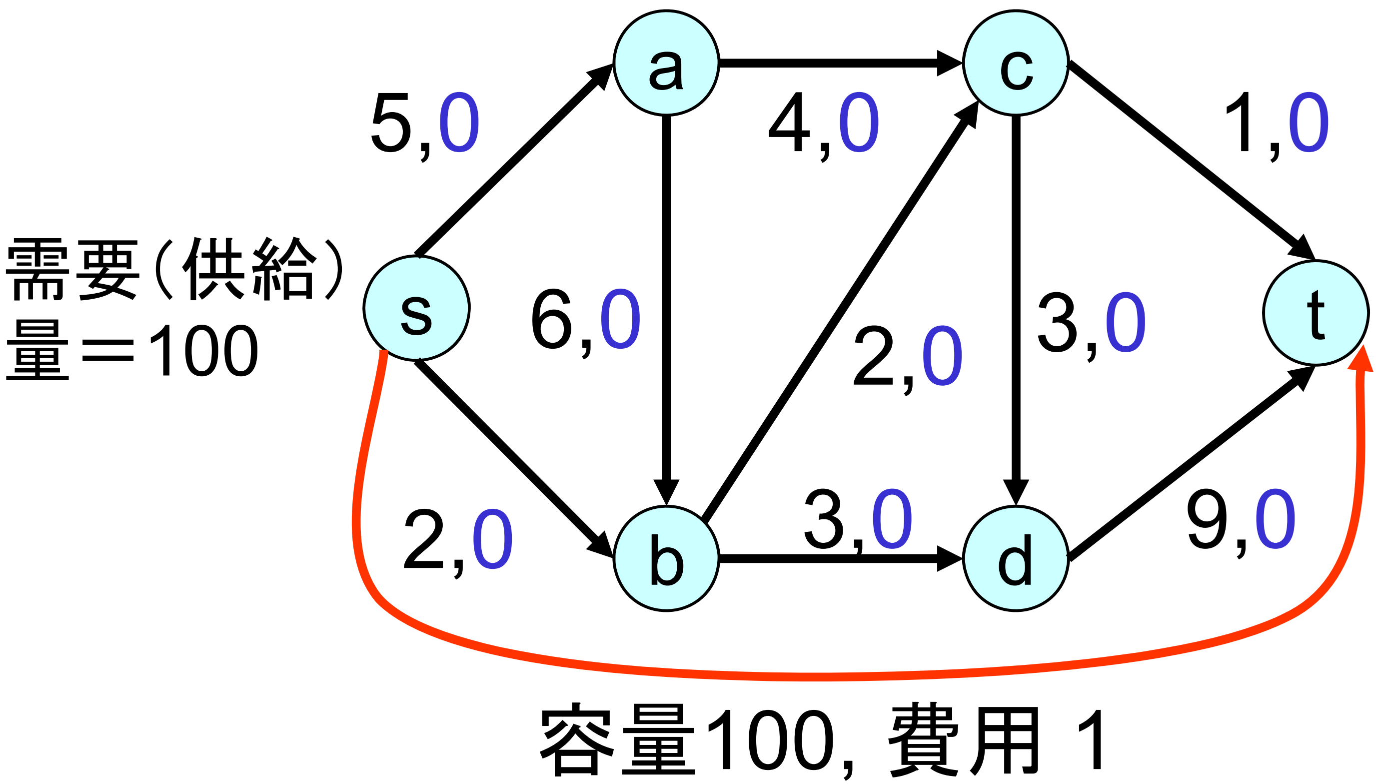
最大流問題との関係

最大流問題から最小費用流問題への変換

新たな枝(s,t)の追加：容量=U（十分大きい値），費用=1

元々の枝の費用=0

s の需要・供給量＝U，t の需要・供給量＝ - U



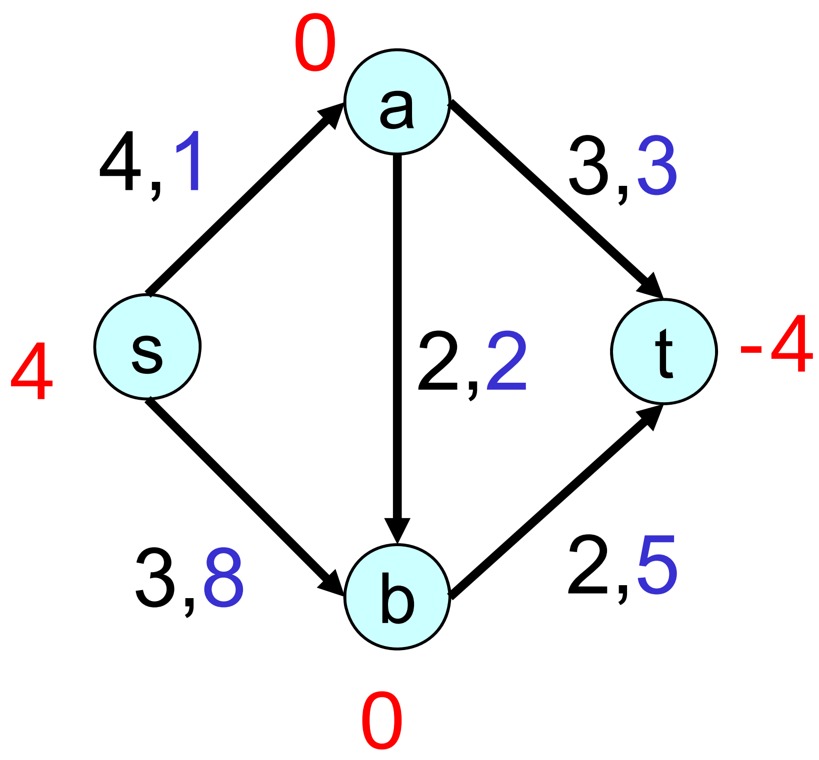
最小費用フローを求める

➔元々の枝を流れるフローは最大フローになっている

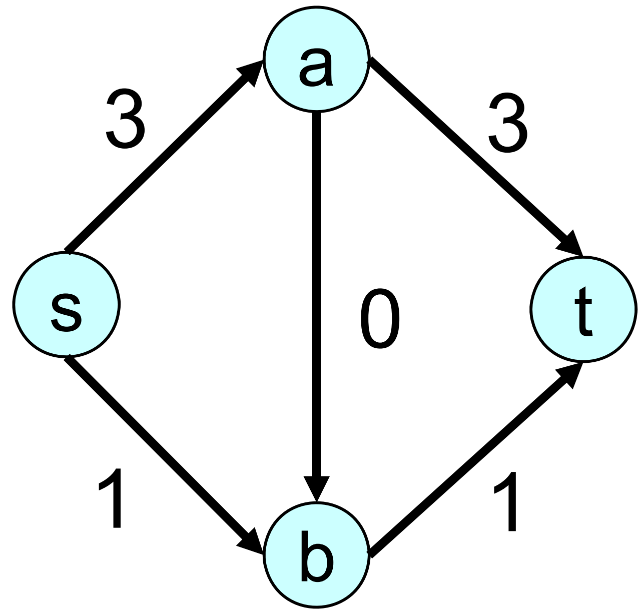
レポート問題

問1: 次の最小費用フロー問題に対して、
(1) 定式化せよ
(2) 与えられた初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し,
　最小費用フローを求めよ(途中の計算過程も省略せず書くこと)

(a)

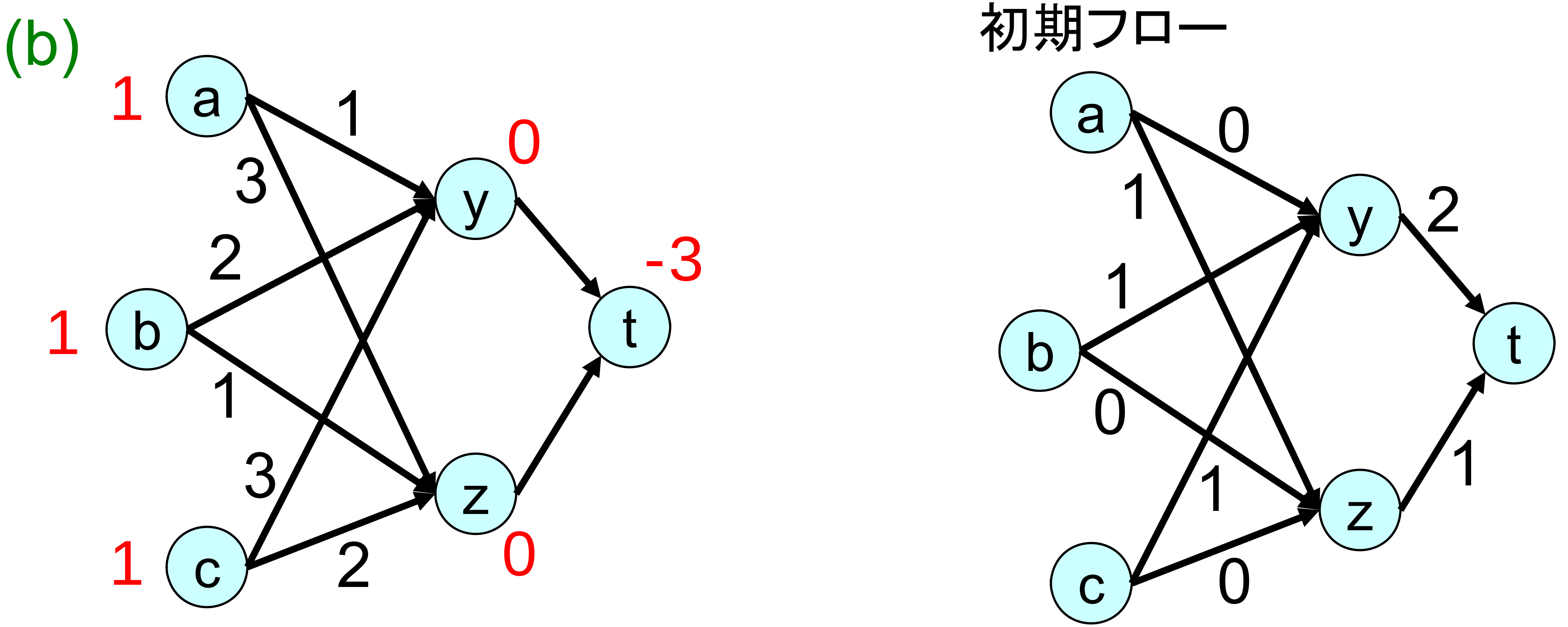


初期フロー



レポート問題

問2: 次の最小費用フロー問題に対して、
(1) 定式化せよ
(2) 与えられた初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し，最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）



枝(y, t), (z, t) の容量は3，それ以外の枝の容量は1
t に入る枝の費用は0，それ以外は各枝の数値を参照

応用:プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

(2000年頃のデータ)

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

エクスポスの優勝可能性

✕ 残り全勝しても80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定：やや難しいケース

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィリーズ	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの優勝可能性 ×

優勝可能性判定：やや難しいケース

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83 83	71		1	6	1
フィリーズ	80 81	79	1		0	2
メッツ	78 84	78	6	0		0
ナショナルズ	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で下位チームが上位チームに勝った場合

○

優勝の可能性はゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定：複雑なケース

では，次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所属のチームとの試合

	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	レイズ	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
レイズ	49	86	3	4	0	0		20

レイズは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上➔優勝の可能性？

最大流問題を使って判定ができる

優勝可能性判定の基本的な考え方

レイズにとって都合の良いケースのみ考える

●レイズは残り全勝

●東地区の他チームは他地区との試合において全敗

東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

■どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる

➔優勝の可能性なし

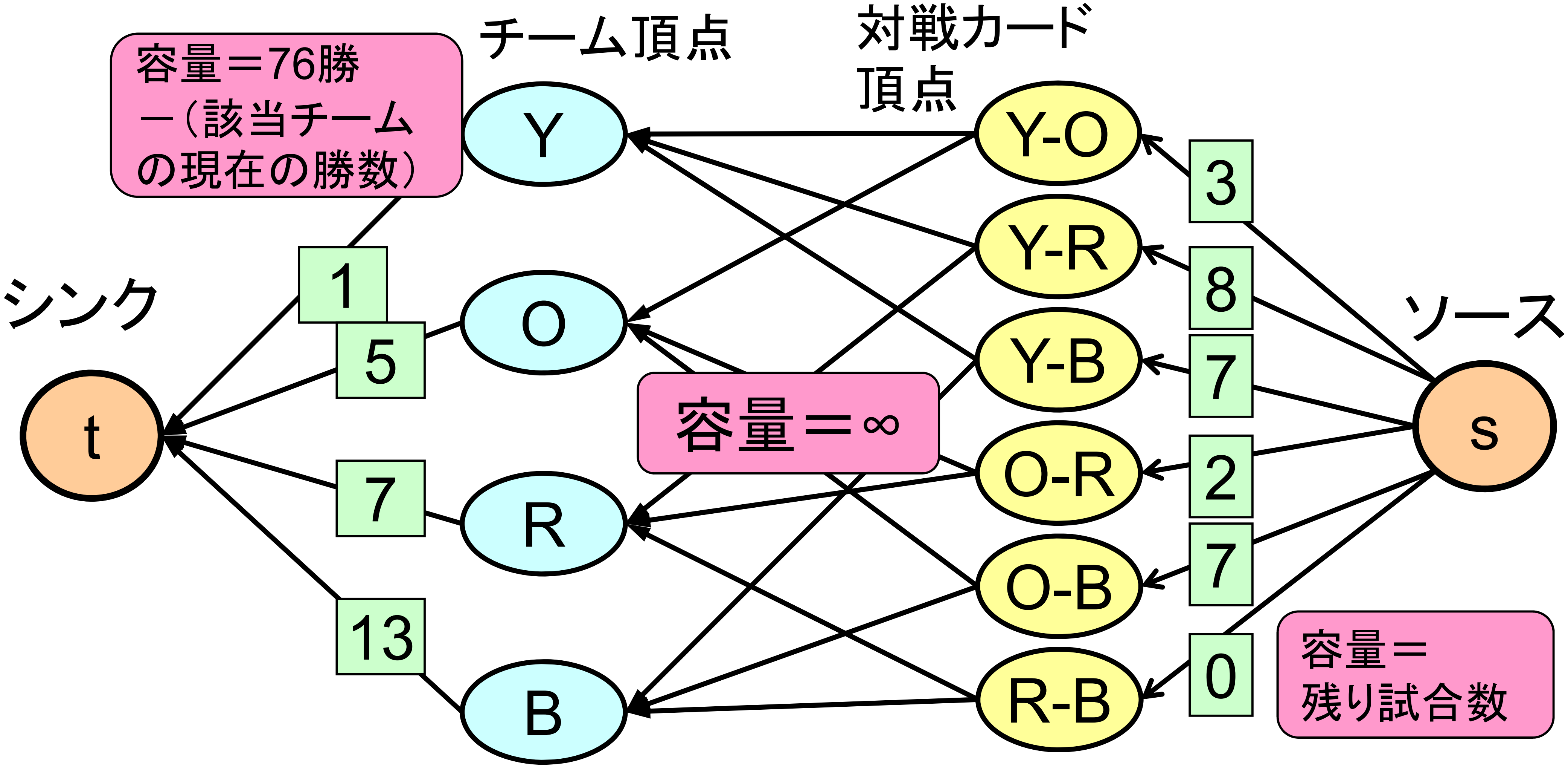
■あるケースにおいては，他チームは全て76勝以下

➔優勝の可能性あり

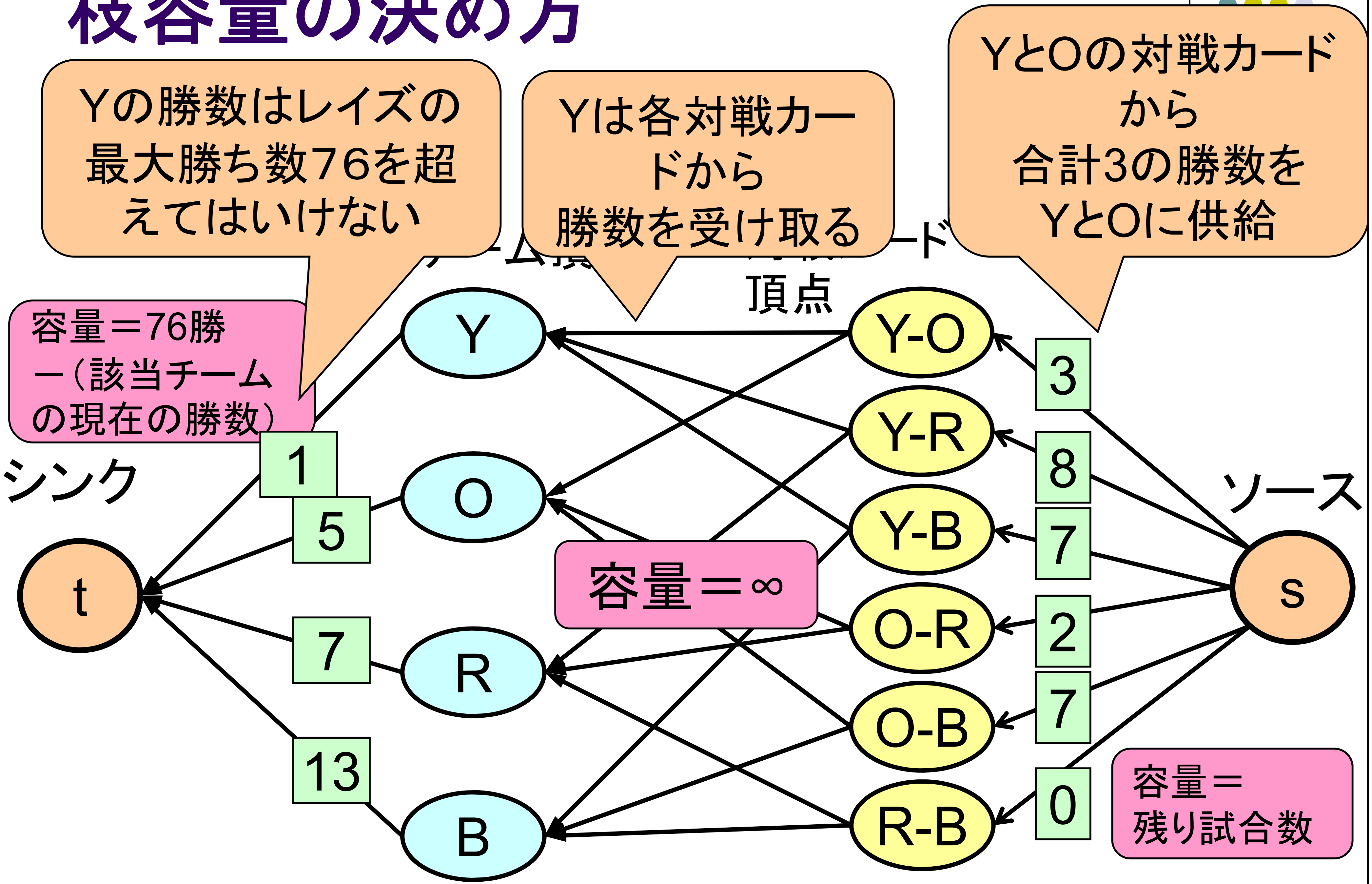
最大流問題（供給需要を満たすフローの問題）に帰着

最大流問題への帰着：
グラフの作り方

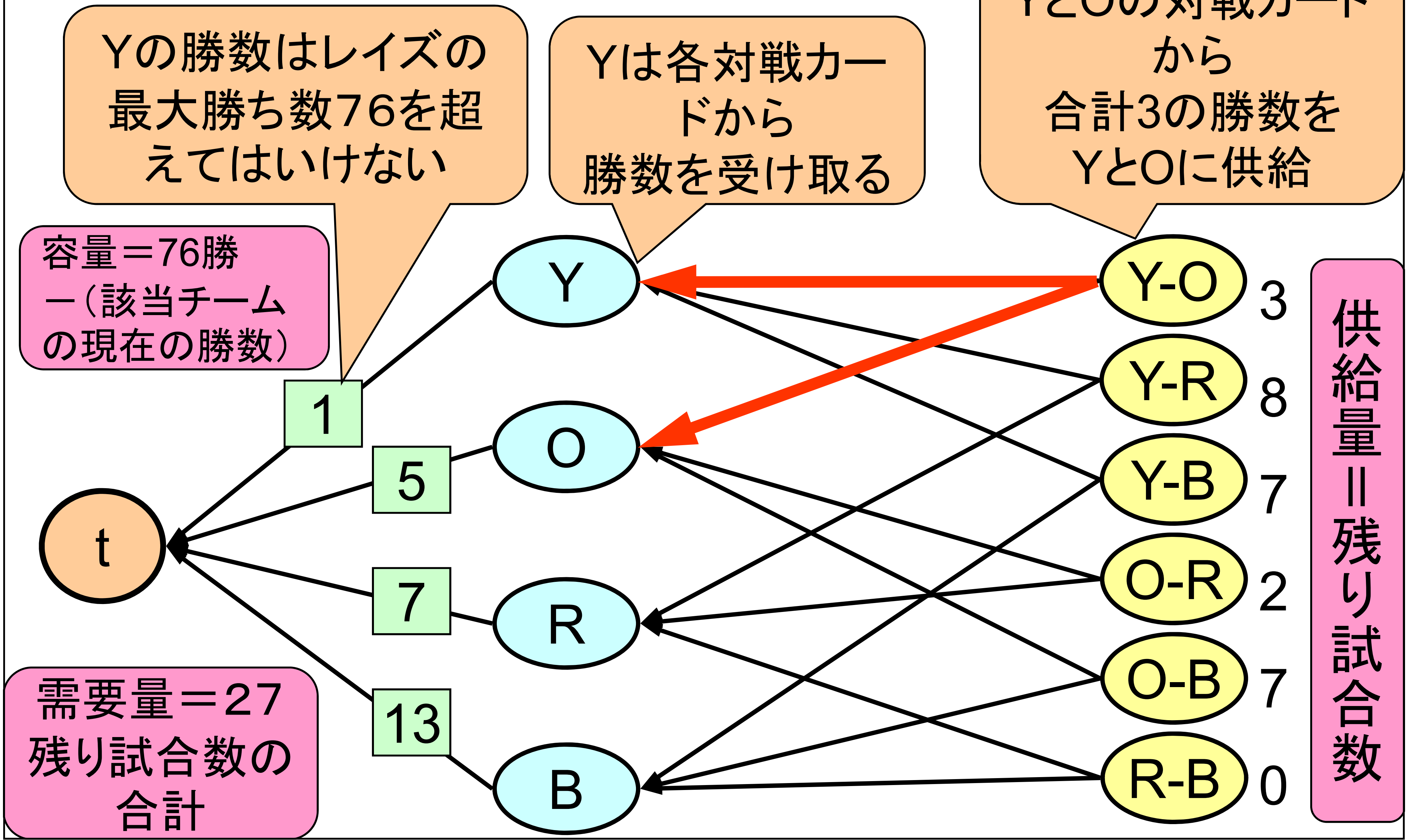
最大フローの総流量＝残り試合数の合計27⇔優勝可能性が存在



最大流問題への帰着：
枝容量の決め方



最大流問題への帰着：需要供給量の決め方



その他の優勝可能性判定問題

- アメリカのプロ野球の優勝可能性判定問題は比較的容易
- 日本のプロ野球
  - リーグ優勝判定は難しい（引き分けあり，勝率1位が優勝）
  - プレーオフ進出判定はもっと難しい（勝率3位まで考慮するため）
  - 分枝限定法のような技法で正確かつ効率的に計算

    ➔数理システム社と時事通信社
- サッカーのリーグ戦
  - 勝ち2点，引き分け1点，負け0点➔最大流問題に帰着できる
  - 勝ち3点，引き分け1点，負け0点➔難しい

    （対戦チーム間での勝ち点の合計が一定でないため）