

問1: 右の線形計画問題の基底解をすべて計算せよ. また, 対応する基底変数, 非基底変数の組合せを書け.

$$\begin{aligned} x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 12 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

等式 $m = 2$ 個, 変数 $n = 4$ 個

→ ${}_4C_2 = 4 \times 3 / 2 = 6$ 個の基底解

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4 : $(0, 6, 0, 0)$

基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4 : $(12, 0, -24, 0)$

基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3 : $(4, 0, 0, 8)$

基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4 : $(0, 6, 0, 0)$

基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3 : $(0, 6, 0, 0)$

基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2 : $(0, 0, 12, 12)$

$$\begin{aligned} x_1 &= 12 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= -24 + 4x_2 + 3x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -2x_1 + x_4 \\ x_2 &= 6 - 1/2x_1 - 1/2x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 12 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

問2: 右の線形計画問題について考える

① x_1, x_2 が基底変数の場合

② x_1, x_4 が基底変数の場合

それぞれの場合に対し、対応する基底解が最適解か否かを判定せよ。授業で説明したやり方で判定すること。

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - x_2 \\ x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

① x_1, x_2 が基底変数となるように、辞書を書き換える

$$\begin{aligned} z &= -5 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \end{aligned}$$

基底解は**実行可能**であり、 z の式の各非基底変数の係数が**すべて非負**であるので、**最適解**である。

② x_1, x_4 が基底変数となるように、辞書を書き換える

$$\begin{aligned} z &= -4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_1 &= 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 &= 4 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{aligned}$$

基底解は実行可能だが、 z の式
の非基底変数 x_2 の**係数が負**
であるので、**最適解とは限らない**。

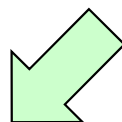
問3: 右のLP(許容辞書)を単体法により解きなさい.

単体法の各反復における辞書, および基底から出る変数, 入る変数を明記すること



$$\begin{aligned}z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3\end{aligned}$$

z の式 of 非基底変数 x_1 の係数が負なので, 基底に入る変数を x_1 とする.
→ 基底から出る変数は x_4 となる.
辞書を書き換える



$$\begin{aligned}z &= -\frac{25}{2} + \frac{5}{2}x_4 + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 5x_2 \\x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

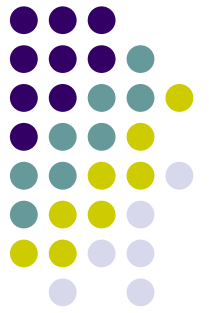
z の式 of 非基底変数 x_3 の係数が負なので, 基底に入る変数を x_3 とする.
→ 基底から出る変数は x_6 となる.
辞書を書き換える

$$z = -13 + x_4 + 3x_2 + x_6$$

$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 2x_4 + 5x_2$$

$$x_3 = 1 + 3x_4 + x_2 - 2x_6$$



z の式 of 非基底変数の
係数が非負なので、
現在の基底解は最適解

∴最適解は $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$

単体法の答えを確かめる方法: 目的関数値が一致する双対問題の許容解を作ればよい



(0) 得られた解が主問題の許容解であることを確認

(1) 元の問題の双対問題をつくる

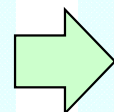
例: 前回の授業で使った答え $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5/3, 0)$
(最適値 $= -20/3$) が最適かどうか?

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$



$$\text{最小化 } -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$\text{条件 } -2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -11$$

$$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 5/3, 0)$ は許容解

双対問題

$$\text{最大化: } -5y_1 - 11y_2 - 8y_3$$

$$\text{条件: } -2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -5$$

$$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -4$$

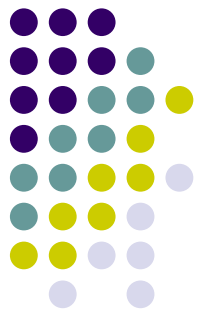
$$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

単体法の答えを確かめる方法

(2) 相補性条件を書く

(3) 得られた主問題の解に対して, 相補性条件を満たす



双対問題の許容解を計算

$$\text{最小化 } -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$\text{条件 } -2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -11$$

$$-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq -8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{最大化: } -5y_1 - 11y_2 - 8y_3$$

$$\text{条件: } -2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -5$$

$$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -4$$

$$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

相補性条件

$$(5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3)y_1 = 0$$

$$(11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3)y_2 = 0$$

$$(8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3)y_3 = 0$$

$$(5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3)x_1 = 0$$

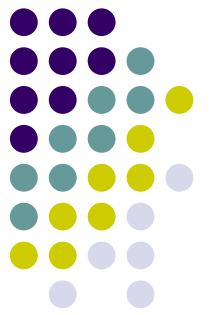
$$(4 - 3y_1 - y_2 - 4y_3)x_2 = 0$$

$$(3 - y_1 - 2y_2 - 2y_3)x_3 = 0$$

単体法の答えを確かめる方法

(2) 相補性条件を書く

(3) 得られた主問題の解に対して, 相補性条件を満たす
双対問題の許容解を計算



相補性条件に $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5/3, 0)$ を代入

$$0 \cdot y_1 = 0$$

$$(28/3) y_2 = 0$$

$$(4/3) y_3 = 0$$

$$(5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3)0 = 0$$

$$(4 - 3y_1 - y_2 - 4y_3)(5/3) = 0$$

$$(3 - y_1 - 2y_2 - 2y_3)0 = 0$$

→ $y_1 = y_3 = 0, y_2 = 4$ が得られるが, これは双対問題の許容解
目的関数値 $= -44 \neq -20/3$

よって $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5/3, 0)$
は主問題の最適解ではない

$$\text{最大化: } -5y_1 - 11y_2 - 8y_3$$

$$\text{条件: } -2y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -5$$

$$-3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq -4$$

$$-y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$