

数理計画法 (数理最適化) 第11回

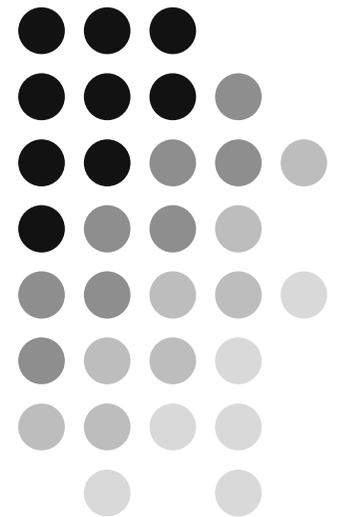
非線形計画その1

一次の最適性条件と最急降下法

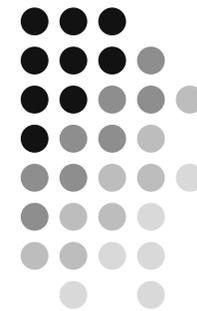
担当: 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



非線形計画問題とは？



目的関数や制約条件が必ずしも線形でない数理最適化問題

例1: 長方形の外周最小化問題

$$\text{最小化 } 2x + 2y$$

$$\text{条件 } xy \geq 1$$

$$x, y \geq 0$$

非線形の
制約条件

例2: 線形制約つき関数最大化問題

$$\text{最大化 } -3x^2 + 5y^3 + 2xy^2 - 4y$$

$$\text{条件 } 3x + 5y \leq 12$$

$$7x + 2y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

非線形の
目的関数

制約なし問題 (unconstrained problem)

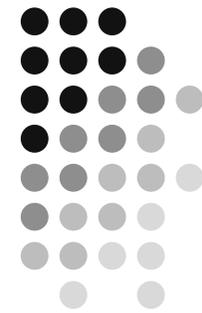
$$\text{最小化 } f(x) \quad \text{条件なし}$$

制約つき問題 (constrained problem)

$$\text{最小化 } f(x) \quad \text{条件 } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

この講義では、制約なし問題を主に扱う

非線形関数の例(その1)

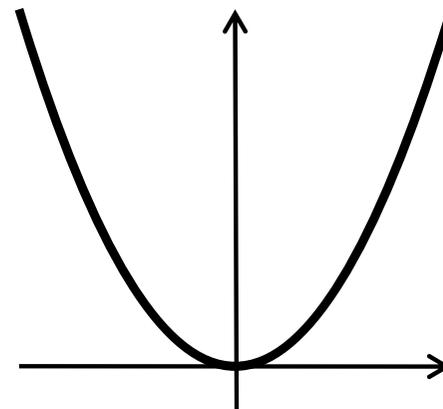
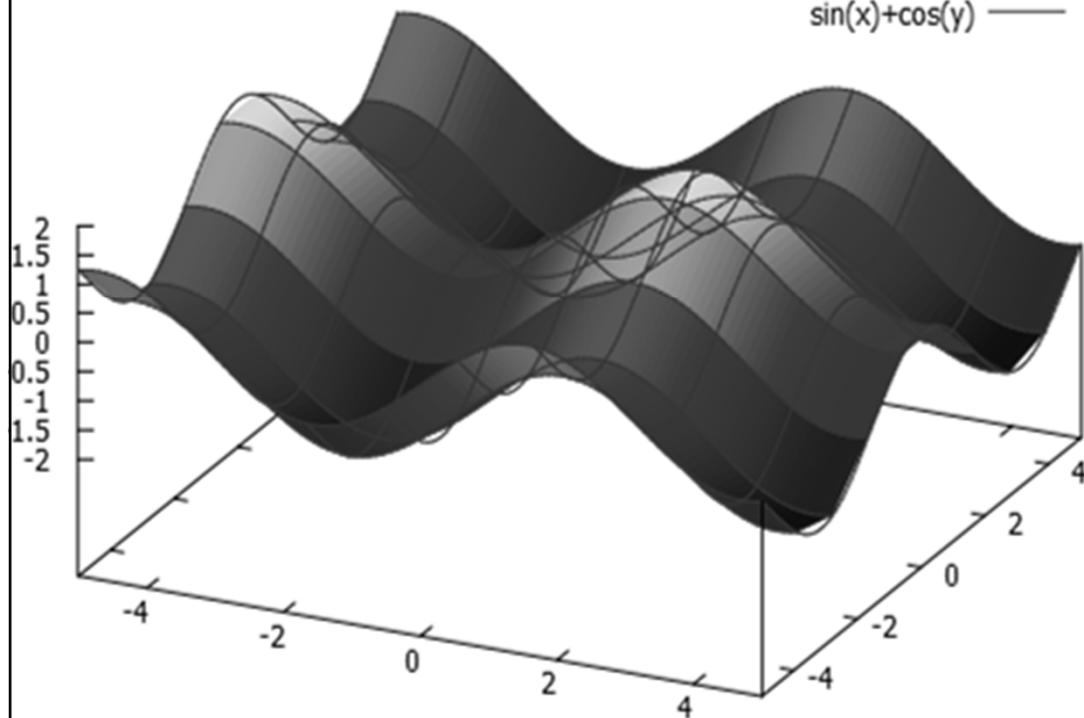


非線形関数 --- 線形でない関数

微分可能な非線形関数の例

$$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$

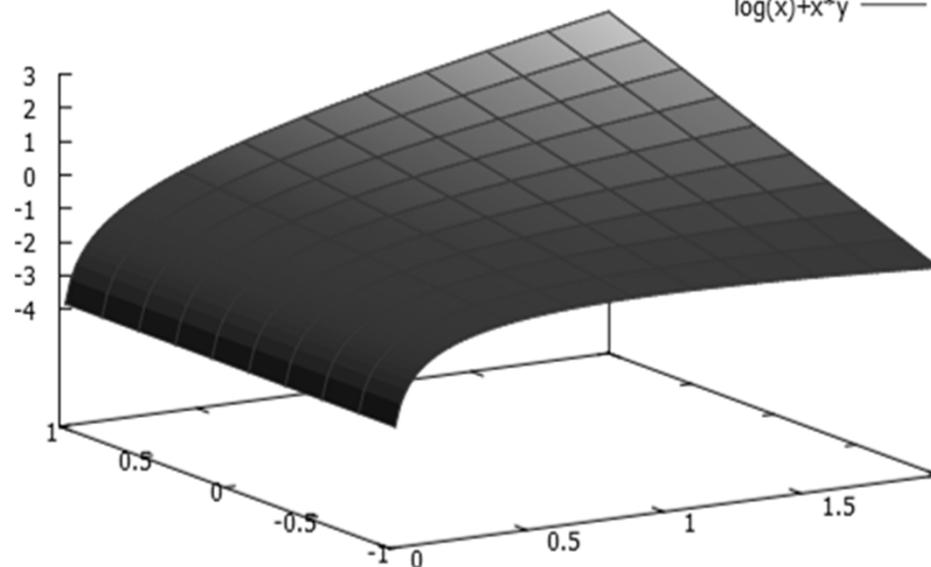
sin(x)+cos(y) ———



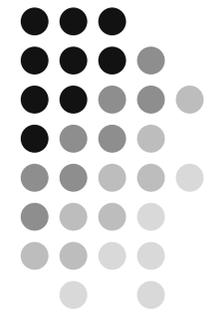
$$f_1(x) = x^2$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$

log(x)+x*y ———

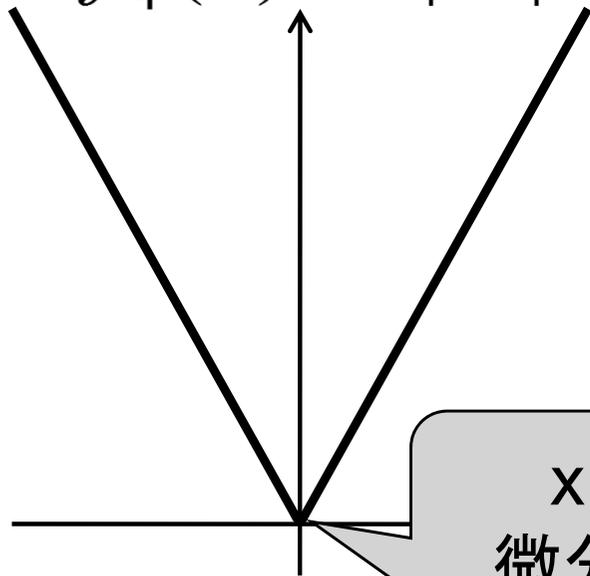


非線形関数の例(その2)



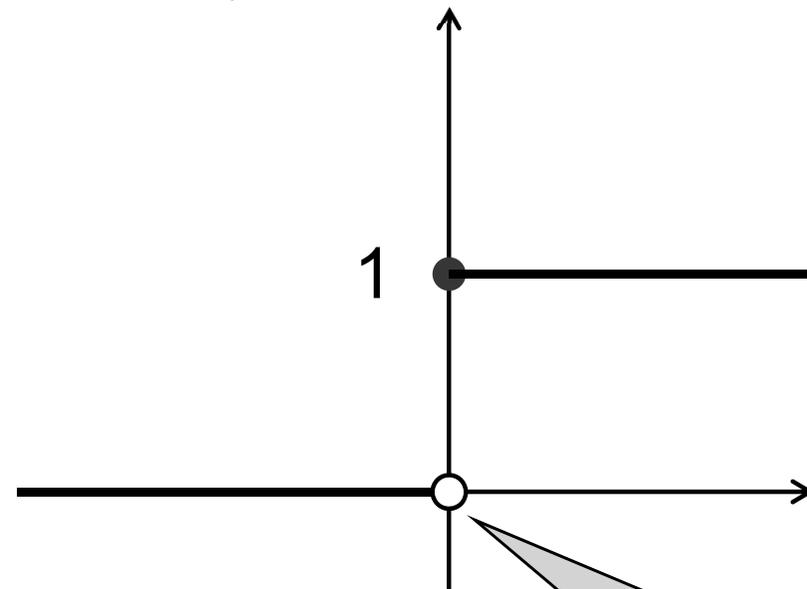
微分不可能な非線形関数の例

$$f_4(x) = |x|$$



x = 0 で
微分不可能

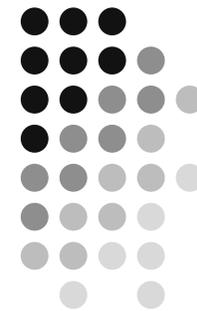
$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



x = 0 で
微分不可能
不連続

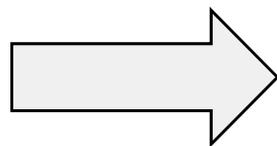
この授業：
主に2回微分可能な関数を扱う

制約つき問題の 制約なし問題への帰着



制約つき問題

最小化 $f(x)$ 条件 $g_i(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$)



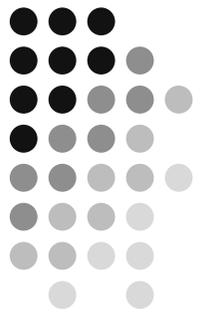
制約なし問題

最小化 $f(x) + h(x)$ 条件 なし

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が元の制約を満たすとき}) \\ M(\text{十分大きい数}) & (\text{それ以外するとき}) \end{cases}$$

- 関数 h は微分不可能
→ この制約なし問題を直接解くことは実用上難しい
- 関数 h を滑らかな関数で近似 → 解きやすい制約なし問題
これを繰り返し解いて、制約つき問題の(近似)最適解を求める
→ ペナルティ関数法, バリア関数法

勾配ベクトル



関数 f の勾配ベクトル (gradient vector)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

一変数関数の場合 $\nabla f(x) = f'(x)$

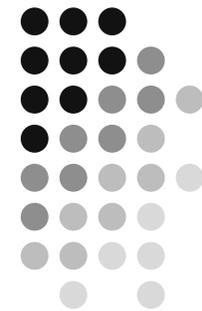
例:

$$f_1(x) = x^2 \longrightarrow \nabla f_1(x) = 2x$$

$$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$

$$\longrightarrow \nabla f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

勾配ベクトル(続き)

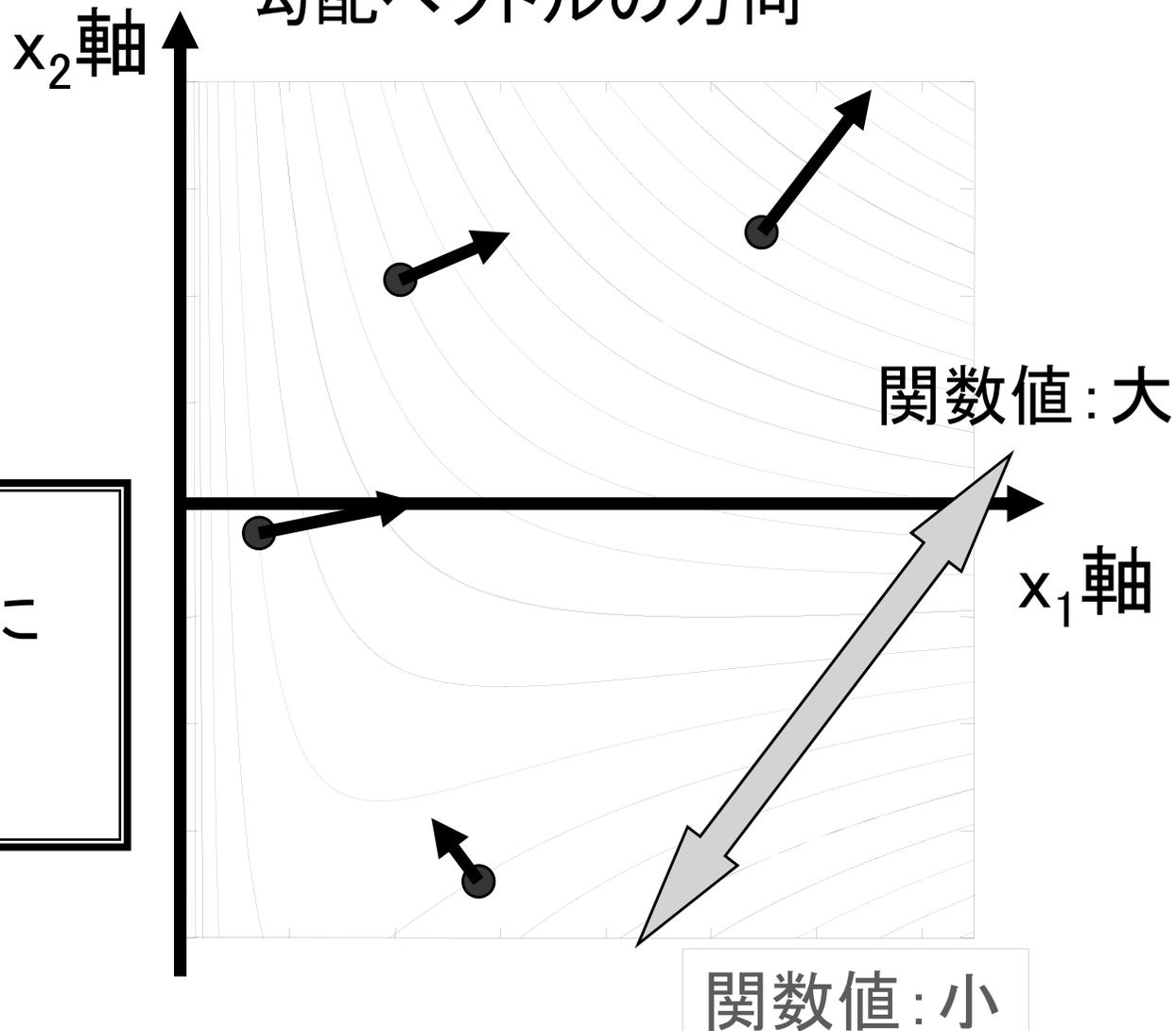


$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$

↓

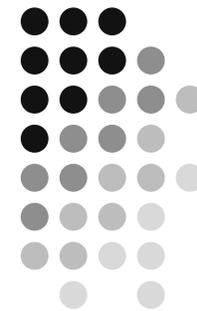
$$\nabla f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1/x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

関数 f_3 の等高線と
勾配ベクトルの方向



勾配ベクトルのイメージ:

- 関数という山を登るときに最も急な方向
- 関数値が増加する方向



一次のテイラー展開

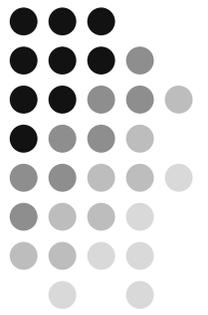
任意の関数 f はベクトル $a \in \mathbb{R}^n$ を使って
次の形に表現できる

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \varphi(x - a)$$

関数 $f(x)$ の $x = a$ における
一次のテイラー展開

関数 $\varphi(x - a) = \varphi(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ は
 $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n$ に関する
2次以上の項からなる n 変数多項式関数
(定数項, 一次の項は全く含まれない)

$x - a$ が十分小さいとき,
 $\varphi(x - a)$ は十分小さい



一次のテイラー近似

関数 $f(x)$ の $x = a$ における
一次のテイラー展開

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \varphi(x - a)$$

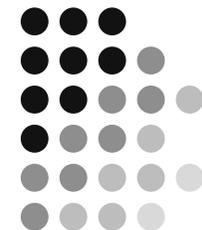
$x \simeq a$ のとき, $\varphi(x - a)$ の値は他の項に比べて
十分小さい(0に近い) \rightarrow 無視できる

$$\tilde{f}(x) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a)$$

関数 $f(x)$ の $x = a$ における
一次のテイラー近似

- 線形関数, 傾き = $\nabla f(a)$
- $x \simeq a$ のとき $\tilde{f}(x) \simeq f(x)$,
とくに $\tilde{f}(a) = f(a)$

テイラー展開とテイラー近似の例



例1: $f_1(x) = x^2$ $f_1'(x) = 2x$,

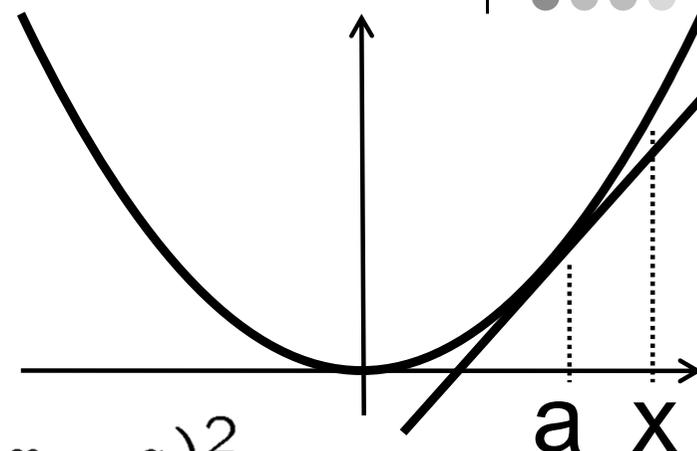
テイラー展開

$$f(x) = a^2 + 2a(x - a) + \varphi(x - a)$$

ここで

$$\varphi(x - a) = f(x) - \{a^2 + 2a(x - a)\} = (x - a)^2$$

テイラー近似 $\tilde{f}_1(x) = a^2 + 2a(x - a)$



例2: $f_2(x) = \log x$ $f_2'(x) = 1/x$

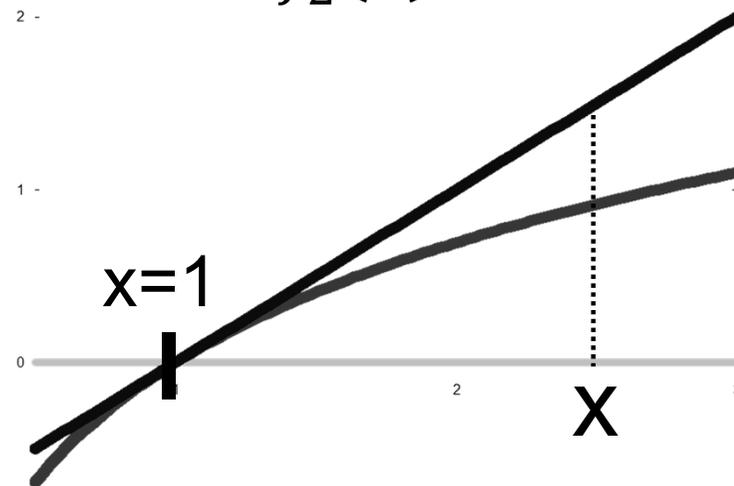
テイラー展開

$$f_2(x) = 0 + \frac{1}{1}(x - 1) + \varphi(x - 1)$$

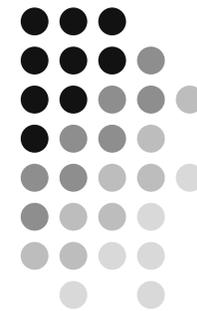
ここで

$$\begin{aligned} \varphi(x - 1) \\ = -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

テイラー近似 $\tilde{f}_2(x) = x - 1$



勾配ベクトルの性質



勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

性質： 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\nabla f(y) \neq 0$ ならば,
十分小さい $\delta > 0$ に対し, $f(y - \delta \nabla f(y)) < f(y)$ 成立

証明: $d = -\delta \nabla f(y)$ とおく (δ : 正の実数)

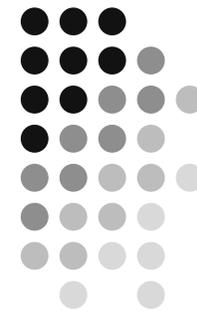
一次のテイラー展開において $x = y + d$, $a = y$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(y + d) &= f(y) + \nabla f(y)^T d + \varphi(d) \\ &= f(y) - \delta \|\nabla f(y)\|^2 + \varphi(-\delta \nabla f(y)) \end{aligned}$$

φ は 2 次以上の項からなる多項式関数

$\Rightarrow \varphi(-\delta \nabla f(y))$ は δ に関する 2 次以上の項からなる
一変数関数

勾配ベクトルの性質



勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

性質： 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\nabla f(y) \neq 0$ ならば,
十分小さい $\delta > 0$ に対し, $f(y - \delta \nabla f(y)) < f(y)$ 成立

証明の続き:

$\varphi(-\delta \nabla f(y))$ は δ に関する 2 次以上の項からなる一変数関数

$\Rightarrow \varphi(-\delta \nabla f(y))/\delta$ は δ に関する 1 次以上の項からなる

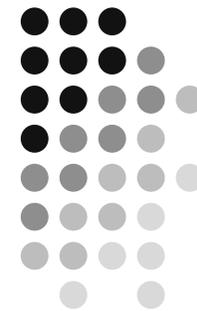
$\therefore \delta$ を十分小さくすると, $\varphi(-\delta \nabla f(y))/\delta$ は 0 に近づく

$$\therefore -\delta \|\nabla f(y)\|^2 + \varphi(-\delta \nabla f(y))$$

$$= -\delta \{ \|\nabla f(y)\|^2 - \varphi(-\delta \nabla f(y))/\delta \} < 0$$

$$\therefore f(y - \delta \nabla f(y)) < f(y)$$

勾配ベクトルの性質

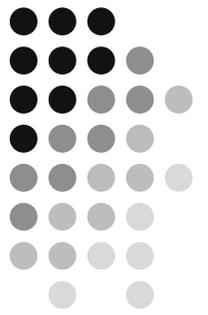


勾配ベクトルの方向に進むと関数値が増える

性質: 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\nabla f(y) \neq 0$ ならば,
十分小さい $\delta > 0$ に対し, $f(y + \delta \nabla f(y)) > f(y)$ 成立

証明は省略(直前の性質と同様に証明できる)

最適性条件



非線形計画問題の最適性条件：
ベクトル x が最適解であるための必要条件（または十分条件）

定義： x は停留点 $\Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$

定理（制約なし問題の最適性条件）：

x^* ：制約なし問題の最適解 $\Rightarrow x^*$ は停留点

証明： $\nabla f(x^*) \neq 0$ と仮定

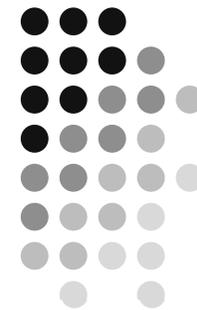
勾配ベクトルの性質より、十分小さい $\delta > 0$ に対して

$$f(x^* - \delta \nabla f(x^*)) < f(x^*)$$

x^* が最適解であることに矛盾

$$\therefore \nabla f(x^*) = 0$$

最適性条件



定理(制約なし問題の最適性条件):

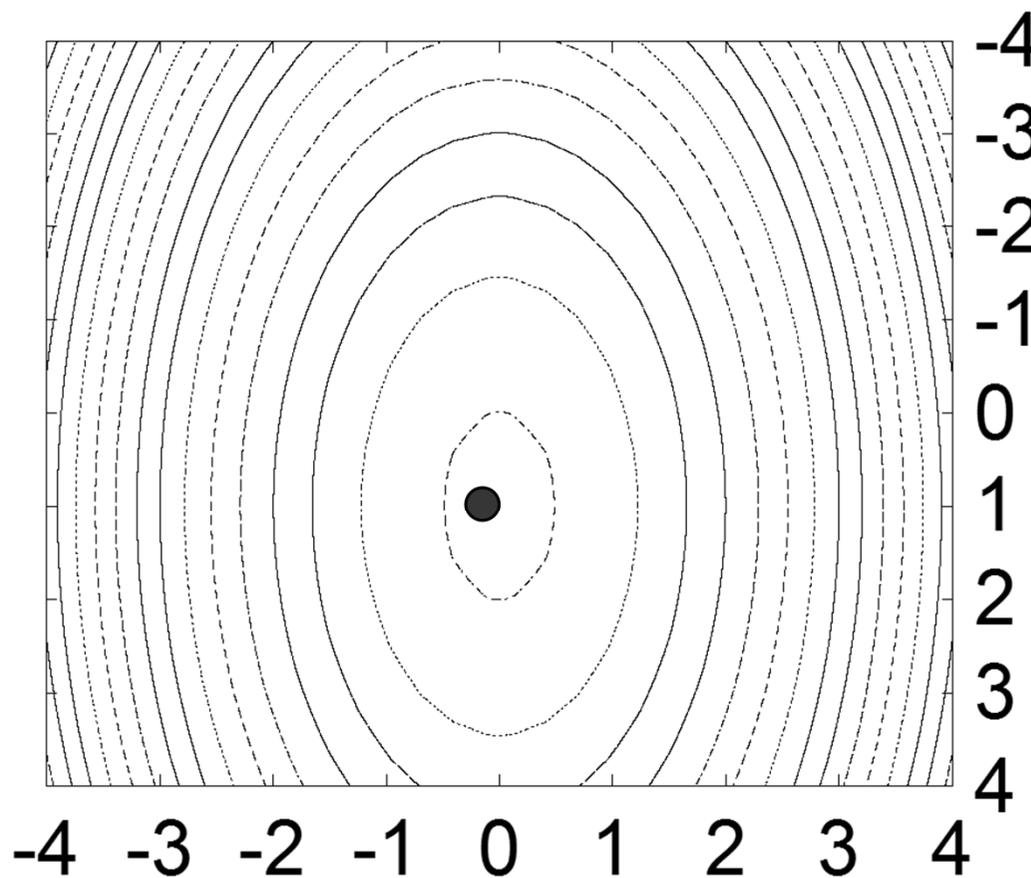
$$x^*: \text{制約なし問題の最適解} \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{例: } f(\mathbf{x}) &= x_1^2 - 2x_1 + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

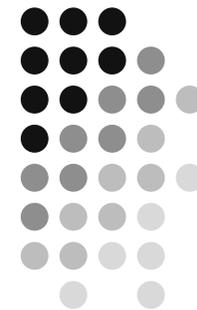
$(x_1, x_2) = (1, 0)$ が最適解

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



最適性条件

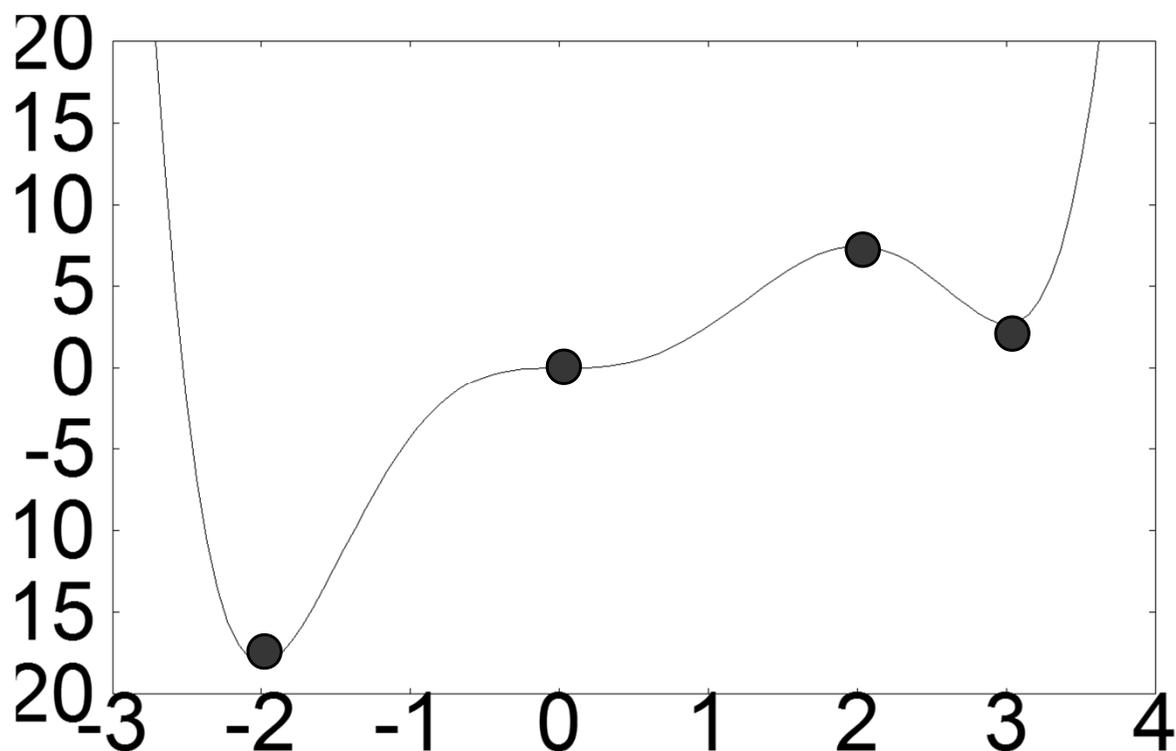


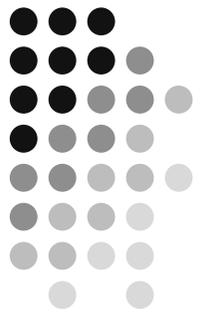
※「 x^* は停留点 $\Rightarrow x^*$ は最適解」は必ずしも成り立たない

例:
$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - x^4 + 4x^3$$

$$\nabla f(x) = (x+2)x^2(x-2)(x-3)$$

停留点は $x = -2, 0, 2, 3$
最適解は $x = -2$ のみ





極小解, 極大解, 鞍点

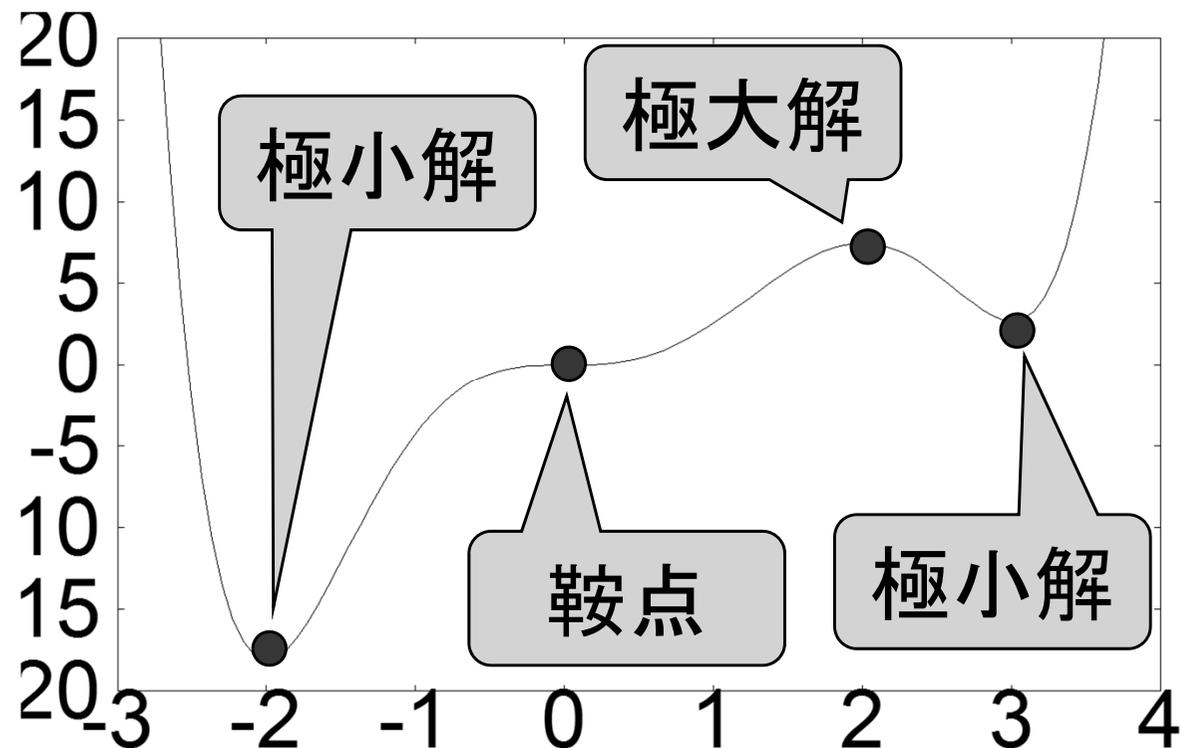
停留点 x^* の分類

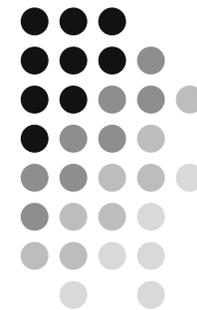
極小解: x^* の付近だけに注目したとき、 x^* は最小

ある $\delta > 0$ が存在して、 $\|x - x^*\| \leq \delta$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq f(x^*)$

極大解: x^* の付近だけに注目したとき、 x^* は最大

鞍点: 極小点でも極大点でもない停留点





制約なし問題の解法1: 最急降下法

最急降下法のアイデア:

勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

現在の点 x を $x - \alpha \nabla f(x)$ により更新

⇒ 関数値 $f(x)$ を減らしていく

ステップサイズ

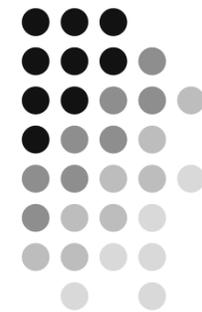
ステップサイズの選び方:

次の一変数最適化問題を(近似的に)解く

最小化 $f(x - \alpha \nabla f(x))$ 条件 $\alpha > 0$

直線探索と呼ばれる

最急降下法の実行例



例: $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 + 4x_2^2$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$$

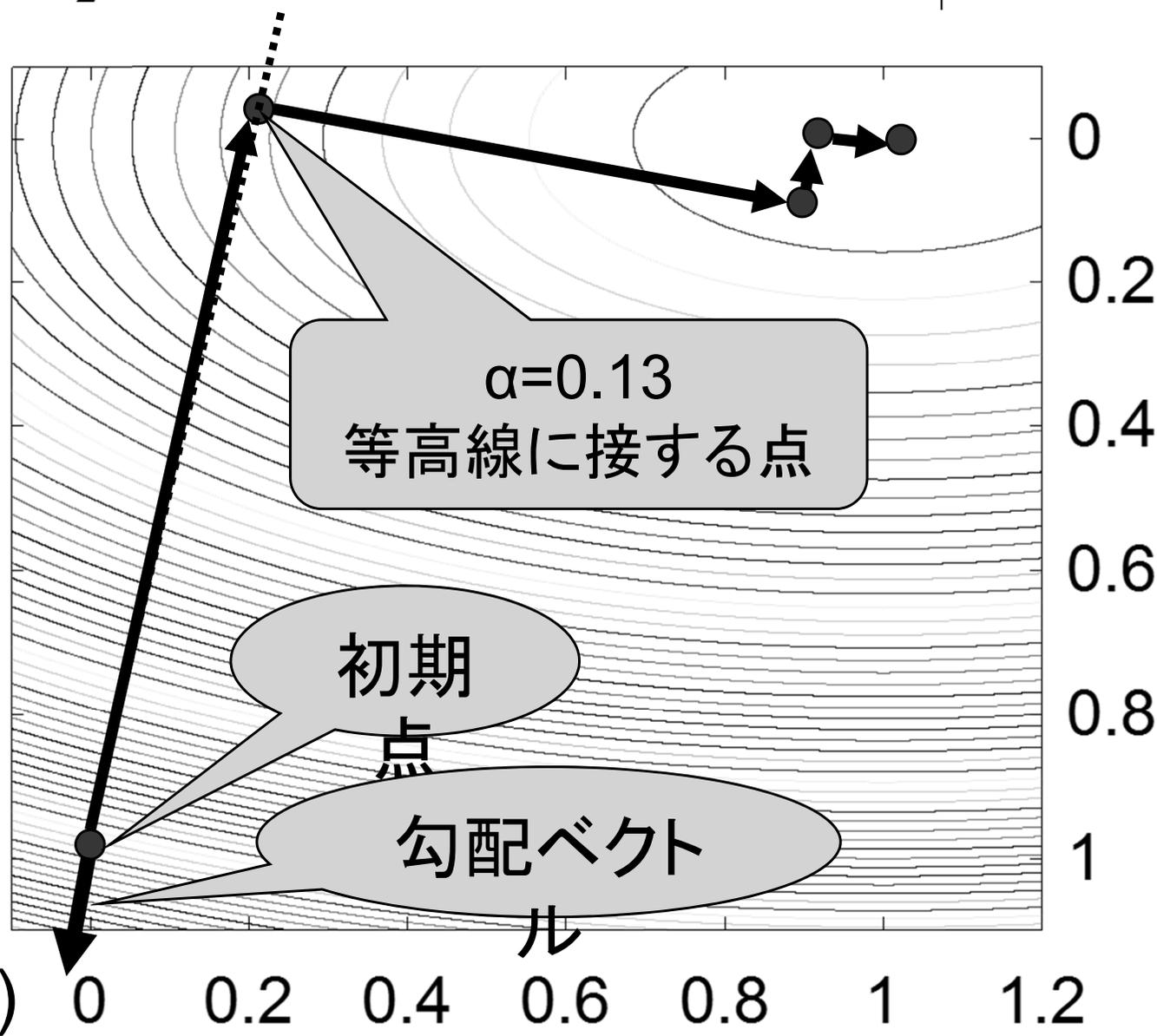
• $(x_1, x_2) = (0, 1)$ から
スタート

• $\nabla f(0, 1) = (-2, 8)$

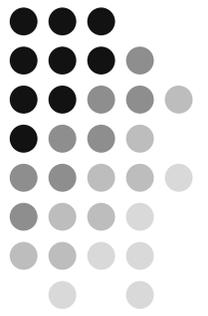
• $f(0 + 2\alpha, 1 - 8\alpha)$
を最小にするのは
 $\alpha = 0.13$

• 次の点は

$(x_1, x_2) = (0.26, -0.05)$



最急降下法のアルゴリズム



入力: 関数 f とその勾配ベクトル ∇f
初期点 x^0

ステップ0: $k=0$ とする

ステップ1: x^k が最適解に十分近ければ終了

ステップ2: 最急降下方向 $-\nabla f(x^k)$ を計算

ステップ3: 直線探索問題

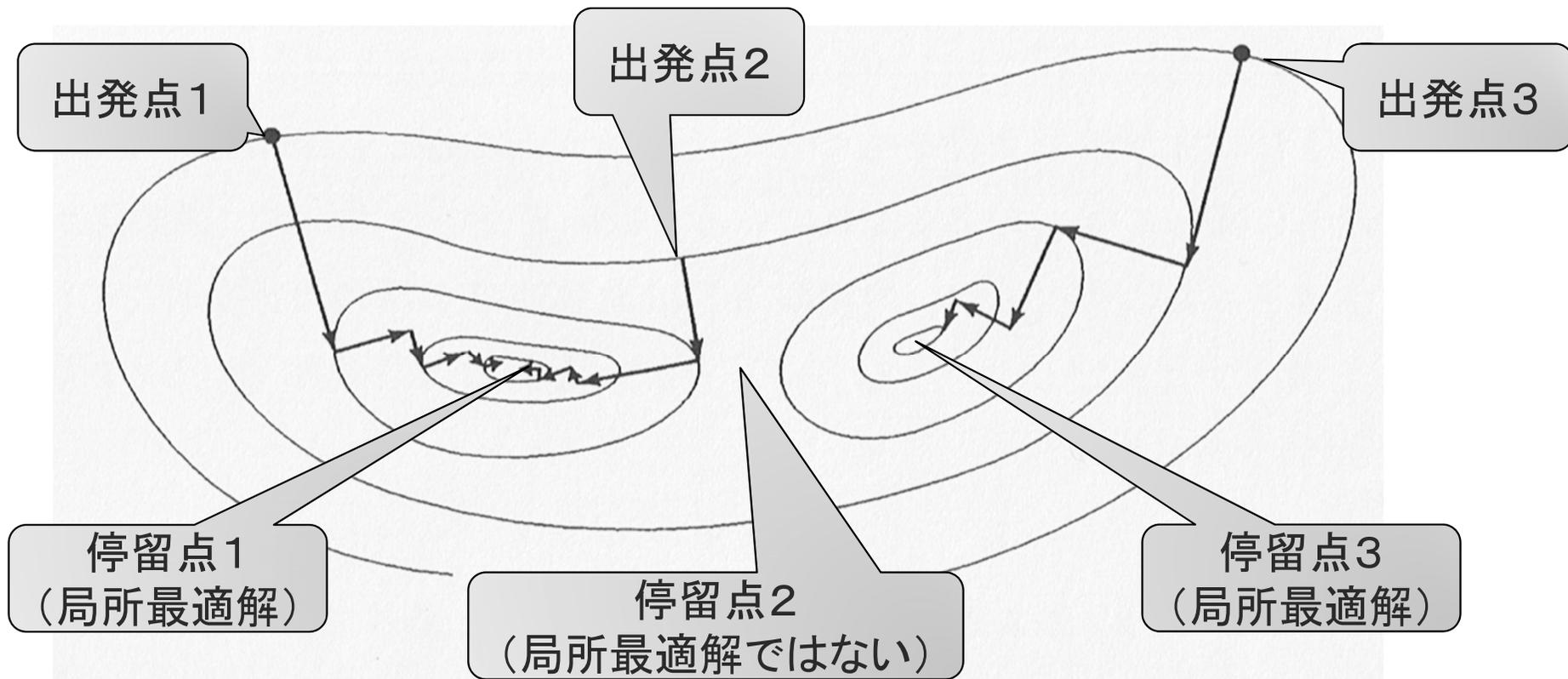
最小化 $f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$ 条件 $\alpha > 0$

を解き、解を α^k とする

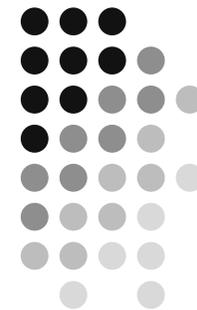
ステップ4: $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$ とおく

ステップ5: $k=k+1$ として、ステップ1に戻る

最急降下法の実行例その2



- 最急降下法は、必ず停留点 ($\nabla f(x) = 0$ となる点)に収束 (大域的収束性)
 - 出発点の選び方次第では、局所的最適解に収束
 - 凸関数の場合、必ず大域的最適解に収束



最適解の判定

- 非線形計画問題では、最適解を正確に求めることは困難

⇒ 最適解に十分近い解(近似最適解)を求める

例: $f(x) = x^4 - 4x^2$

この関数を最小にする x は $0, \pm\sqrt{2}$

無理数をコンピュータで正確に表現することは不可能

- 最適解に十分近いことをどうやって判定する？

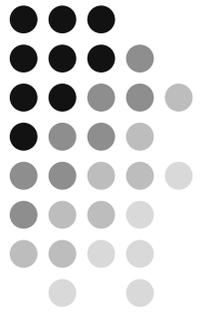
(方法1) 最適解 x^* に対し $\|\nabla f(x)\| = 0$ が成り立つ

⇒ $\|\nabla f(x)\|$ の値が十分小さくなったら終了

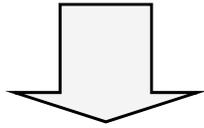
(方法2) 最適解の近くでは x^k があまり変化しない

⇒ $\|x^{k+1} - x^k\|$ の値が十分小さくなったら終了

最適解の判定 (つづき)

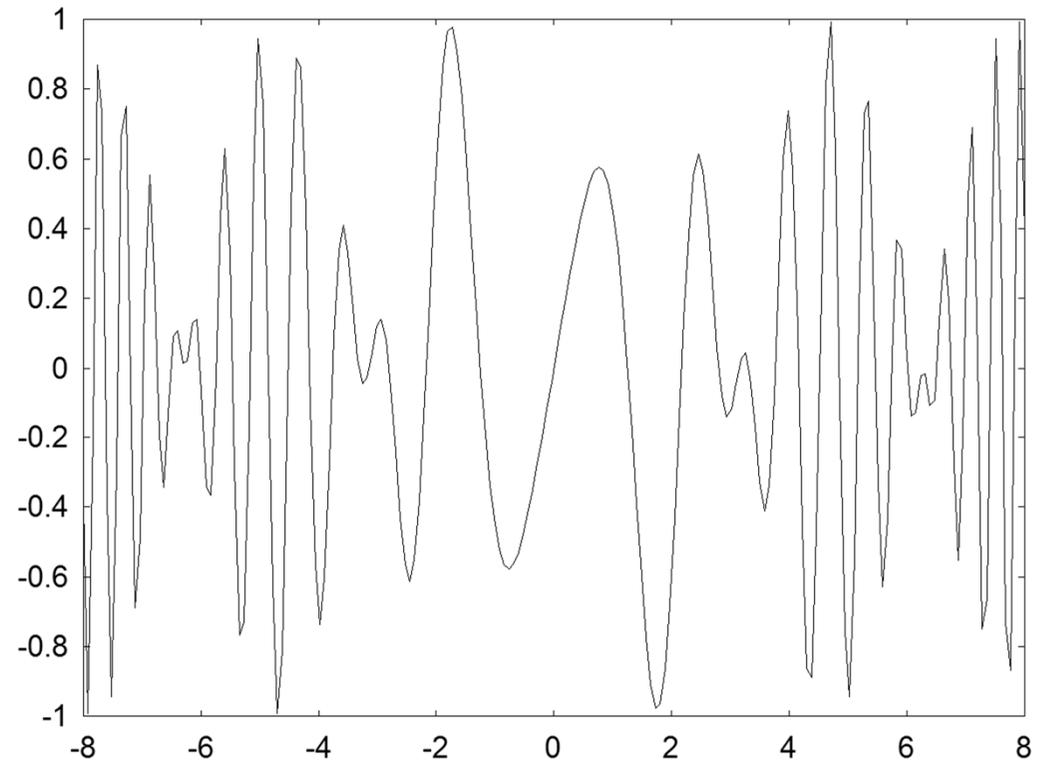


- 非線形計画問題では
近似的最適解すら求めることが困難なことが多い



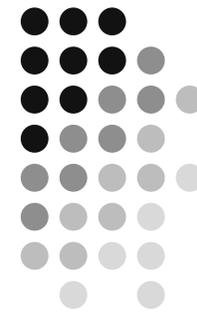
極小解または停留点を
求めることで我慢する

- 極小解は良い解であることが多い
- ある種の非線形関数(凸関数)
では
極小解 \Leftrightarrow 最小解



定理: ある仮定の下で, 最急降下法の求める点列は
停留点に収束する

演習問題



問題 1: 下記の4つの関数の勾配ベクトルを計算しなさい

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T V \mathbf{x} \quad (\text{ただし, } \mathbf{x} \text{ は } n \text{ 次元ベクトル, } V \text{ は } n \times n \text{ 対称行列})$$

問題 2: 問題 1 の3つの関数 $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2)$ に対して, (a_1, a_2) における一次のテイラー近似を求めなさい.

問題 3: 関数 $f(x, y) = (x - 2)^4 + (x - 2y)^2$ に対して、初期点を $(0, 3)$ として最急降下法を適用せよ。資料に添付してある等高線の図を使って実行すること。(具体的な数値は計算しなくてもよい)

ポイント: 点の動きを表す折れ線の角度は必ず90度

