

数理計画法 第9回

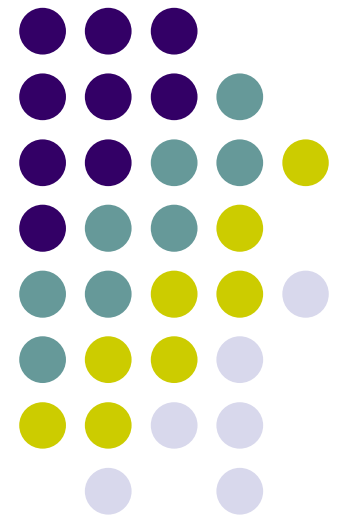
ネットワーク計画

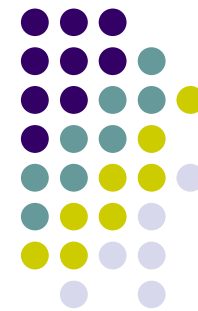
フロー増加法の正当性と
最大流最小カット定理

担当： 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



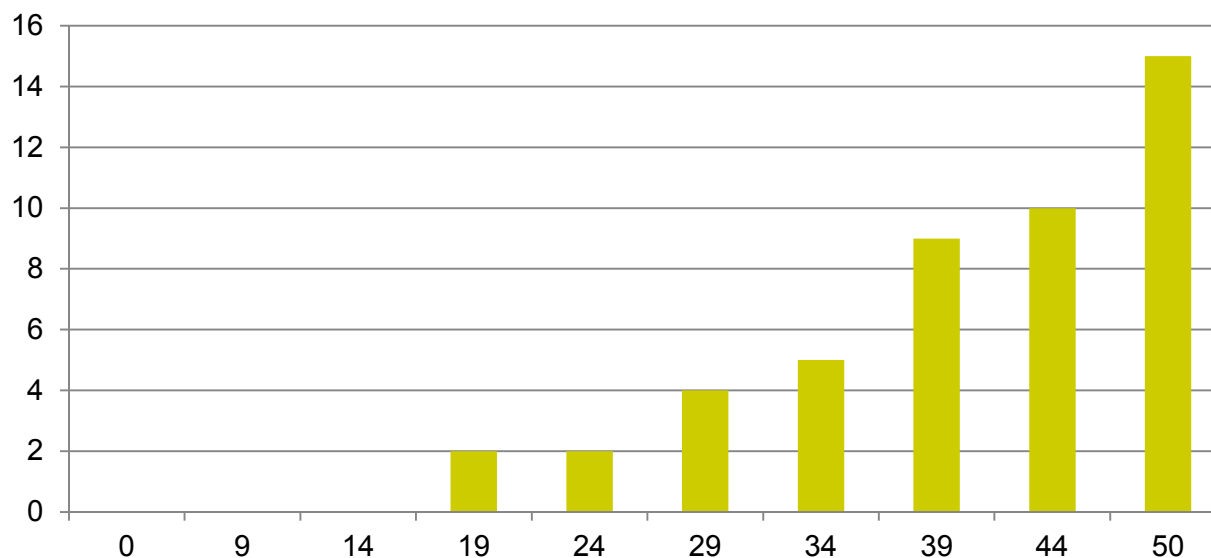


中間試験の結果

- 受験人数: 47人
- 平均点: 37.5/50
- 最高: 50点
- 40点以上は25人
- 30点未満(不合格)は8人

	問1	問2	問3	問4
平均	9.4	7.3	9.6	12.1
配点	13	12	10	15

中間試験の得点分布



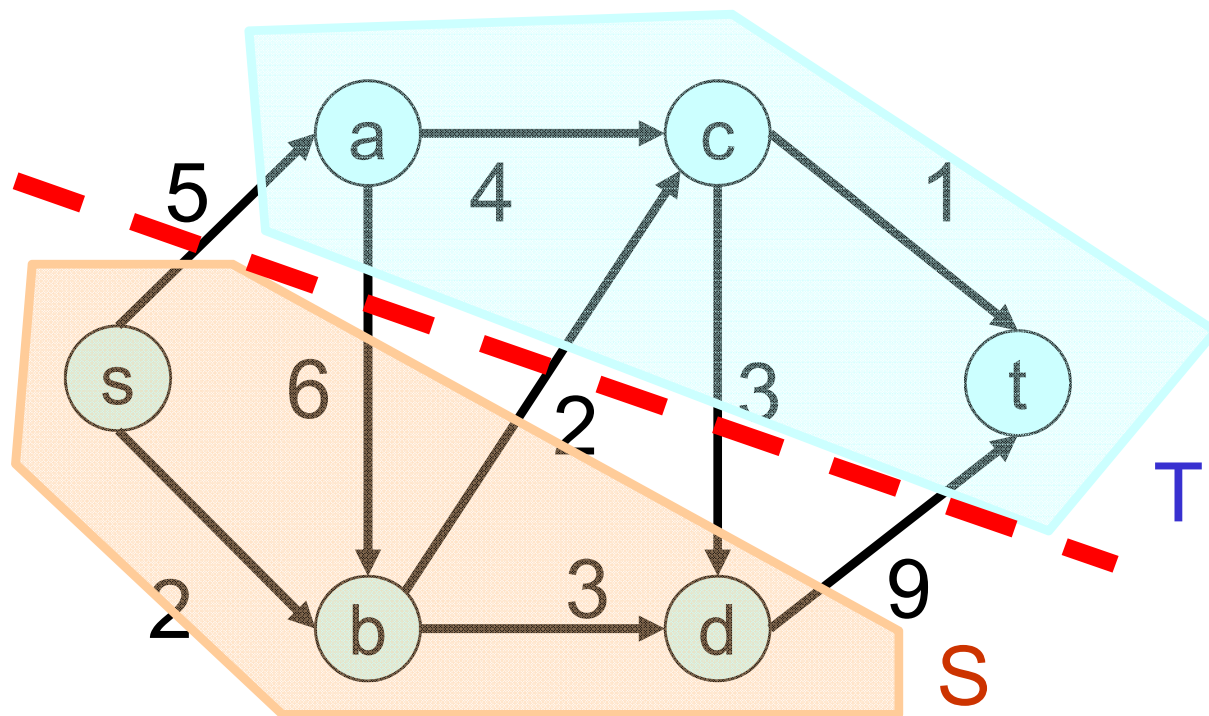
カット



フローを流すとき、ネットワークのボトルネックはどこにあるか？

カット (S, T) : S, T は頂点集合 V の分割 ($S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$)
 S はソース s を含む, T はシンク t を含む

カット (S, T) の容量 $C(S, T) = S$ から T へ向かう枝の容量の和



$$C(S, T) = 5 + 2 + 9 = 16$$

カットの性質(その1)



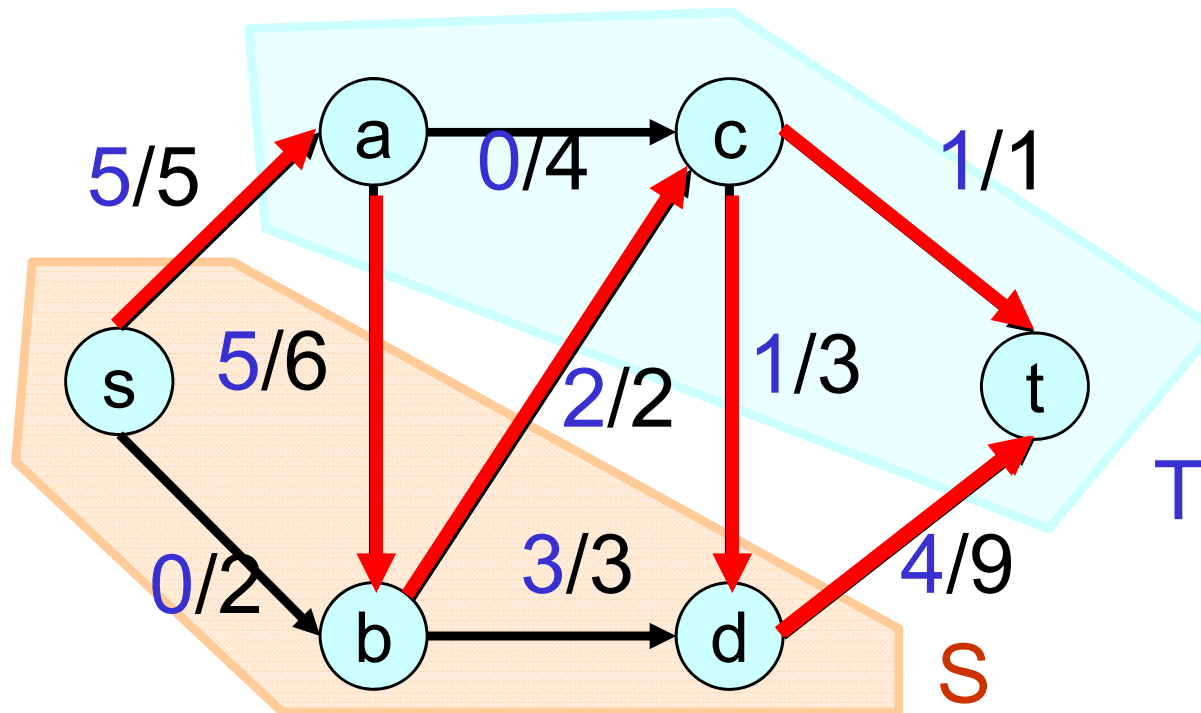
性質1:

任意のカット (S, T) と任意のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し

SからTへの枝のフロー量の和 $x(S,T)$

— TからSへの枝のフロー量の和 $x(T,S)$

= フローの流量 f



$$f = 1 + 4 = 5$$

$$x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11$$

$$x(T, S) = 5 + 1 = 6$$

$$f = 11 - 6 = 5$$

カットの性質(その1)



下記のネットワークの場合の証明:

頂点 $s, b, d \in S$ に関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$

$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$

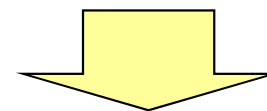
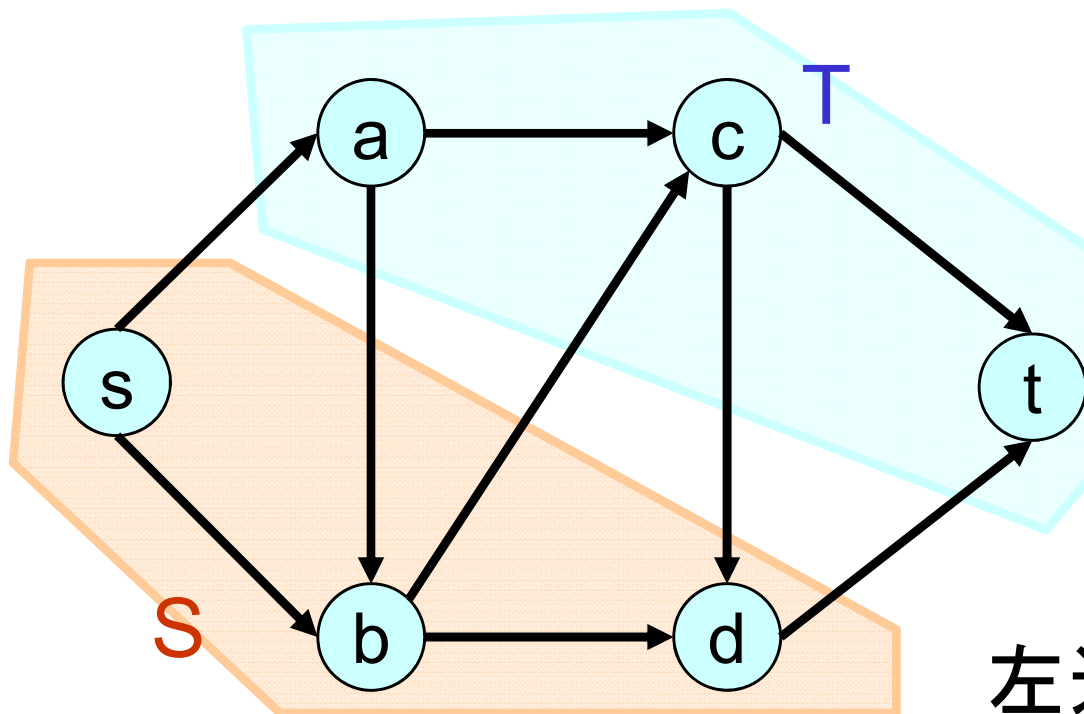
左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝の変数 x_{ij} は
係数が-1

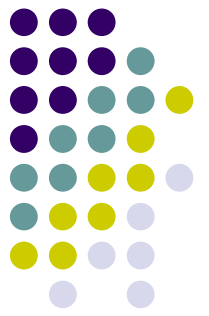
SからSへの枝の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝の変数 x_{ij} は
登場しない



$$\text{左辺} = (x_{sa} + x_{bc} + x_{dt}) - (x_{ab} + x_{cd})$$

カットの性質(その1)



一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$$\begin{aligned} \sum\{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る}\} \\ - \sum\{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る}\} = 0 \quad (k \in S - \{s\}) \\ \sum\{x_{sj} \mid (s,j) \text{ は } s \text{ から出る}\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s) \text{ は } s \text{ に入る}\} = f \end{aligned}$$

左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は係数が+1

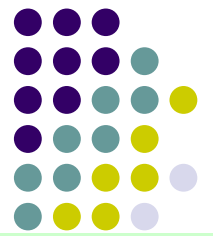
TからSへの枝の変数 x_{ij} は係数が-1

SからSへの枝の変数 x_{ij} は打ち消される

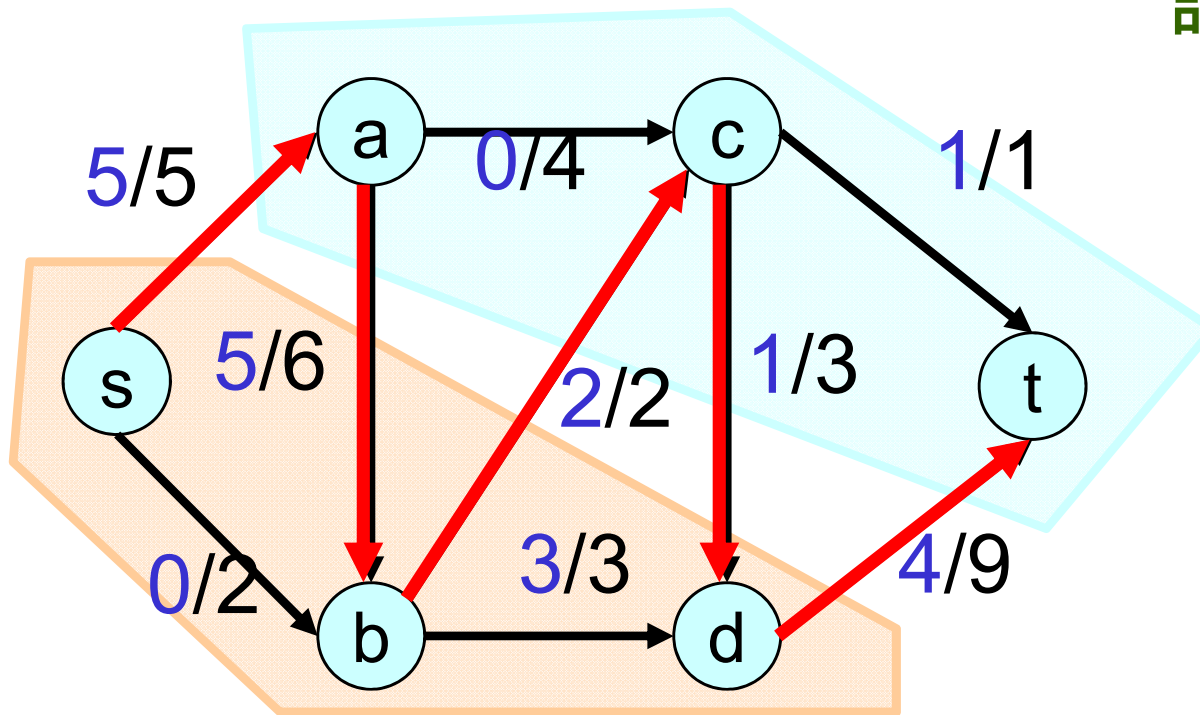
TからTへの枝の変数 x_{ij} は登場しない

$$\Rightarrow \text{左辺} = x(S, T) - x(T, S)$$

カットの性質(その2)



性質2: 任意のカット (S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの流量 $f \leq$ カットの容量 $C(S,T)$



$$f = 5 \leq 16 = C(S, T)$$

証明:

$$f = x(S, T) - x(T, S)$$

(性質1)

$$x(S, T) \leq C(S, T)$$

(容量条件)

$$x(T, S) \geq 0$$

(フローは非負)

$$\therefore f \leq C(S, T) - 0 = C(S, T)$$

最小カット問題



性質2：任意の**カット**と**フロー**に対し
フローの流量 \leq カットの容量

LPの弱双対定理
に対応

→ カットの容量は最大流の流量に
対する上界を与える

より良い上界を求めたい \Rightarrow 最小カット問題

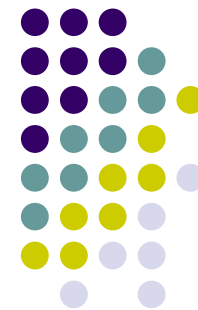
最小カット問題

入力：グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$

出力：容量最小の s - t カット (**最小カット**)

最小カット問題は最大流問題の双対問題

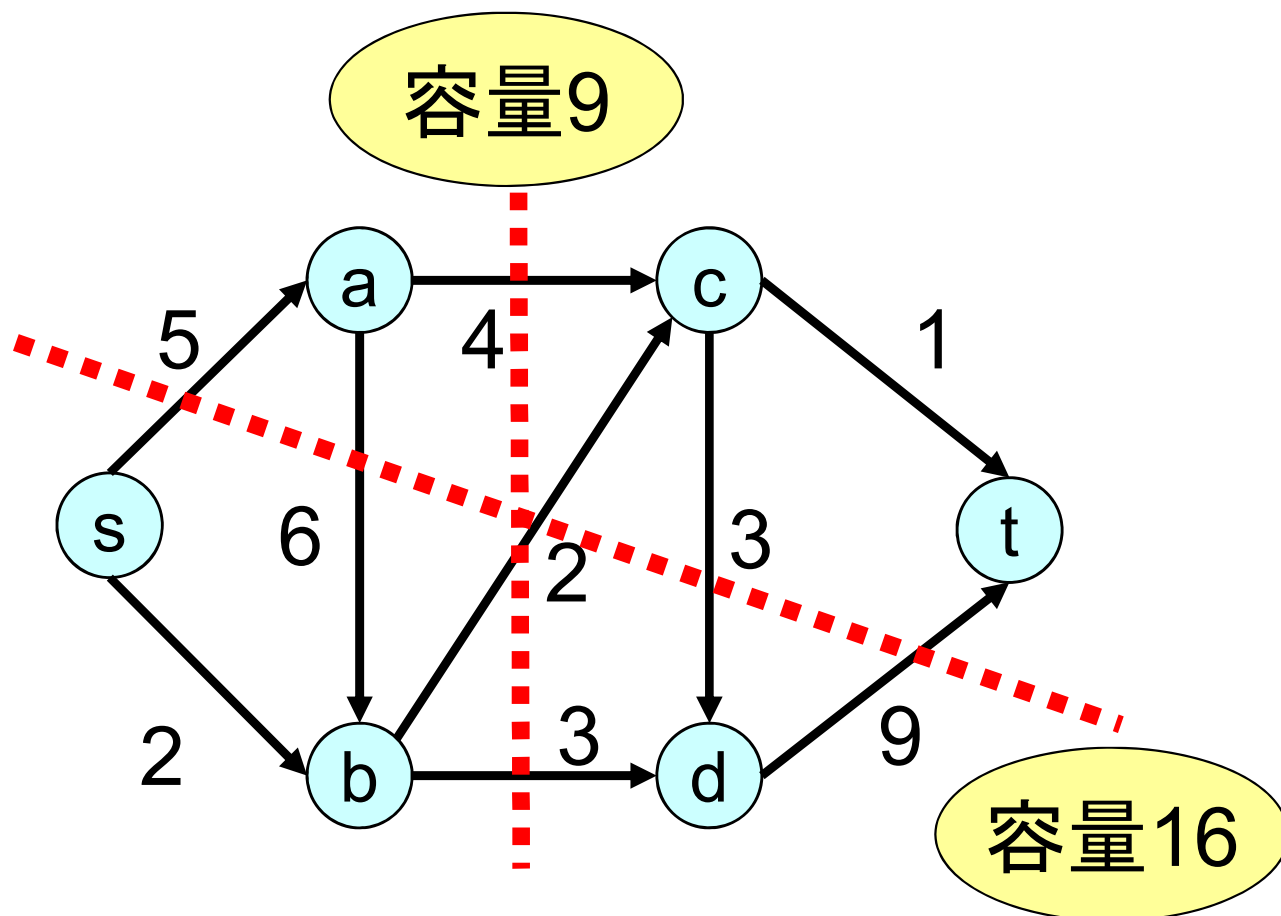
最小カット問題の例



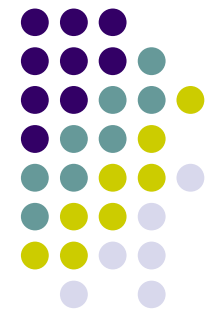
最小カット問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$

出力: 容量最小のカット (**最小カット**)

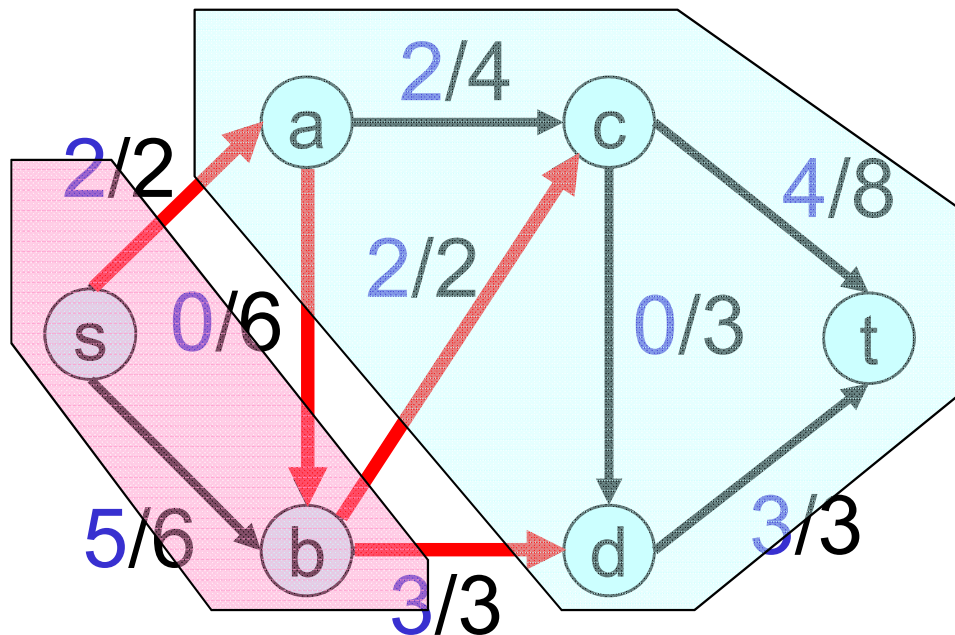


カットの性質(その3)



性質2より次が導かれる

性質3：任意のカット (S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの流量 f = カットの容量 $C(S,T)$ が成り立つ
→ 現在のフローは最大流, カットは最小カット

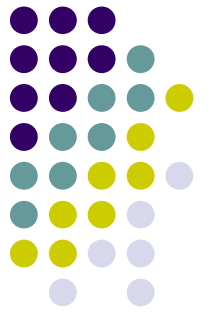


※フロー増加法の正当性の証明で
使われる

$$f = 7, \quad C(S, T) = 7$$

→ 現在のフローは最大流,
カットは最小カット

フロー増加法の正当性(その1)

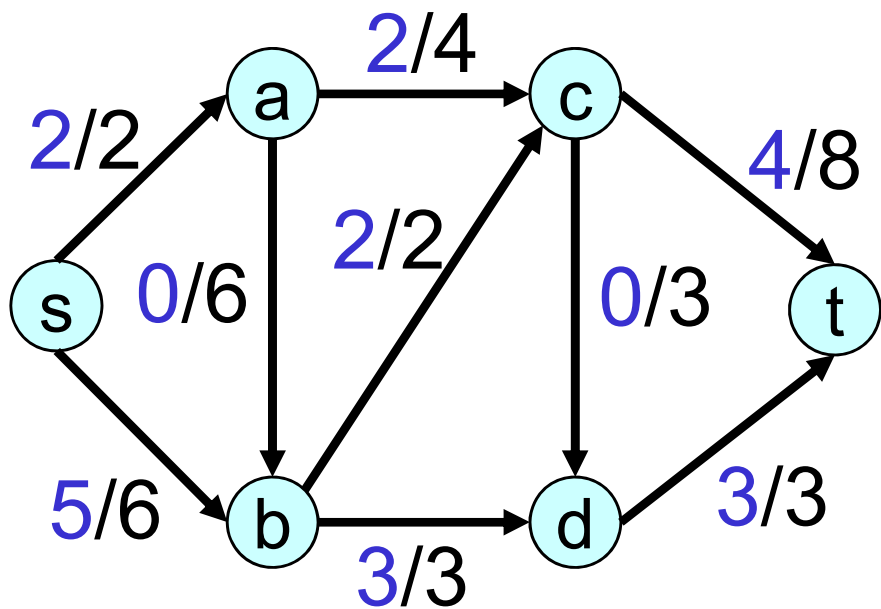
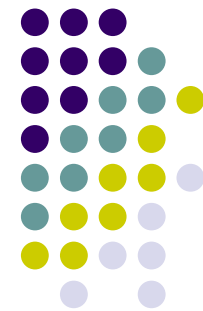


証明の方針

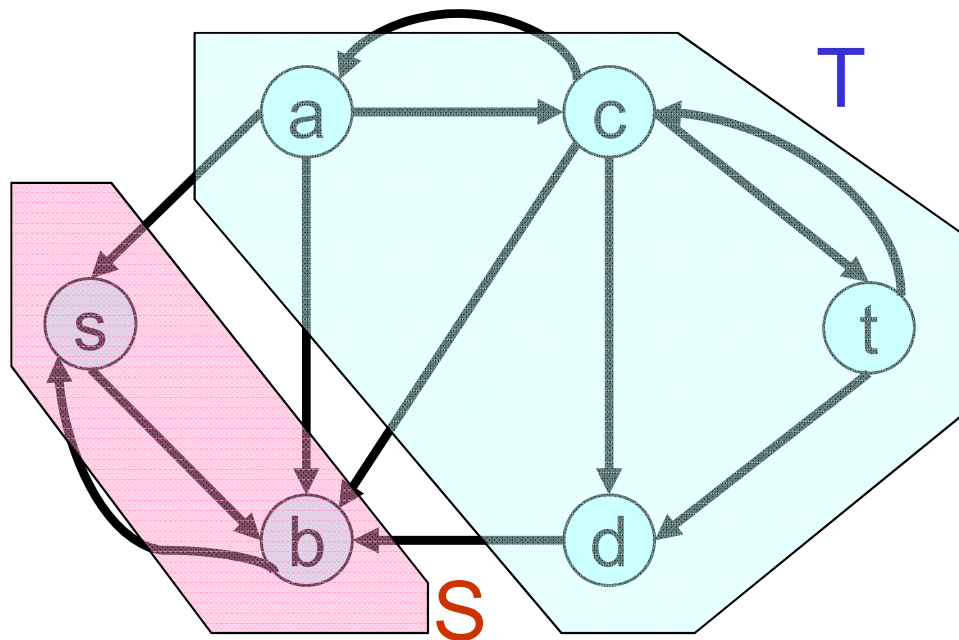
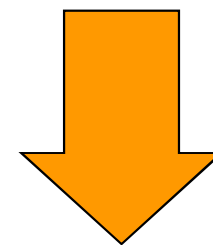
性質3 : 任意のカット (S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの流量 $f =$ カットの容量 $C(S,T)$ が成り立つ
→ 現在のフローは最大流, カットは最小カット

フロー増加法の終了時のフローに対し,
 $f = C(S,T)$ を満たすカット (S,T) が得られることを示す

最大流最小カット定理の証明(その2)

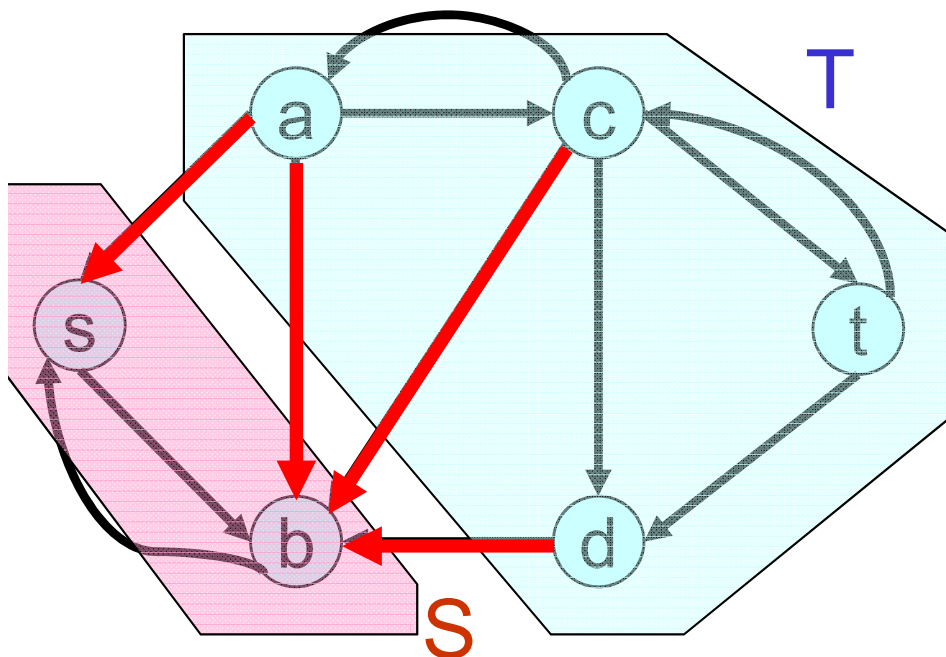
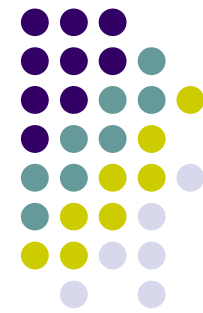


アルゴリズム終了時の
フローに対して
残余ネットワークを作る
残余ネットワークには
増加路が存在しない



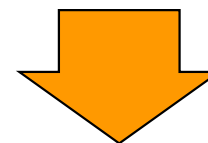
S = 残余ネットワークにおいて
 s から到達可能な頂点集合
 $T = V - S$
に対し、 (S, T) はカット

最大流最小カット定理の証明(その3)



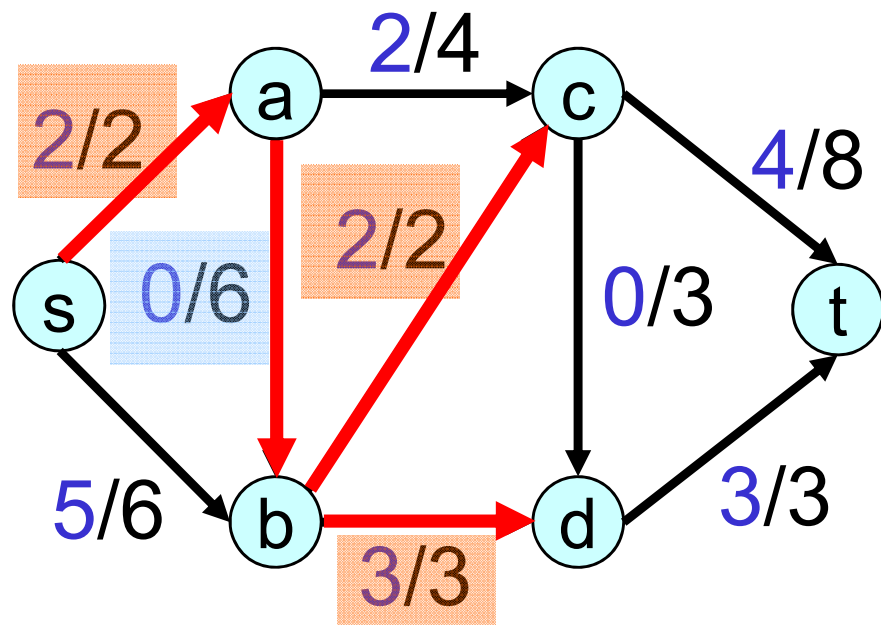
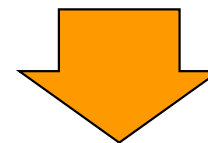
$S = s$ から到達可能な頂点集合

$T = V - S$



残余ネットワークにおいて

S から T に向かう枝は存在しない

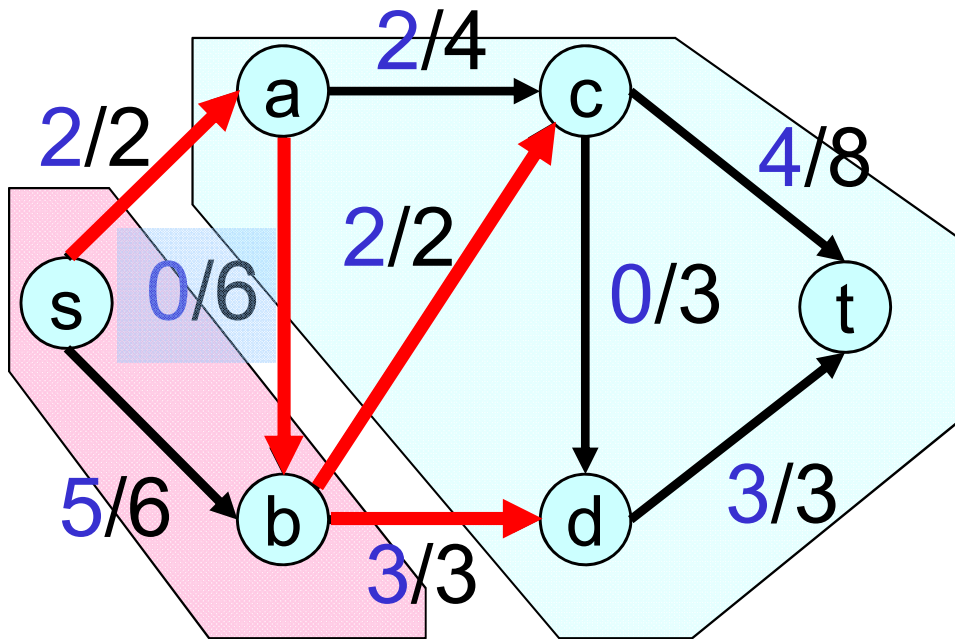
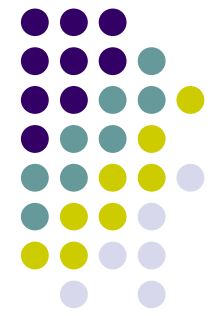


元のネットワークにおいて

S から T に向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

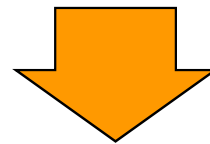
T から S に向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大流最小カット定理の証明(その4)



元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$



$$\begin{aligned} x(S, T) &= \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ 向かう 枝}\} \\ &= \sum \{u_{ij} \mid (i, j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ 向かう 枝}\} = C(S, T) \end{aligned}$$

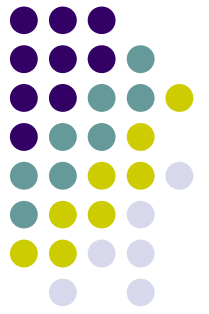
$$x(T, S) = \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \text{ は } T \text{ から } S \text{ へ 向かう 枝}\} = 0$$

$$\therefore x(S, T) - x(T, S) = C(S, T)$$

性質1より $f = x(S, T) - x(T, S)$

$$\therefore f = C(S, T) \quad (\text{証明終わり})$$

最大流最小カット定理



いま証明したことをまとめると、次の通り

定理：フロー増加法により求められたフローは **最大流** である。

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

$$T = V - S$$

とすると、 (S, T) は **最小s-t カット** である。

さらに **$f = U(S, T)$** が成り立つ

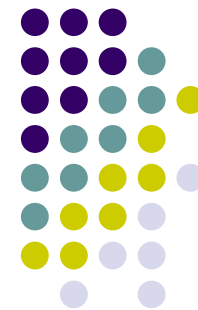
この性質より、次の最大流最小カット定理が得られる

最大流最小カット定理：

最大流 $(x_{ij} \mid (i, j) \in E)$ と**最小s-tカット** (S, T) に対し

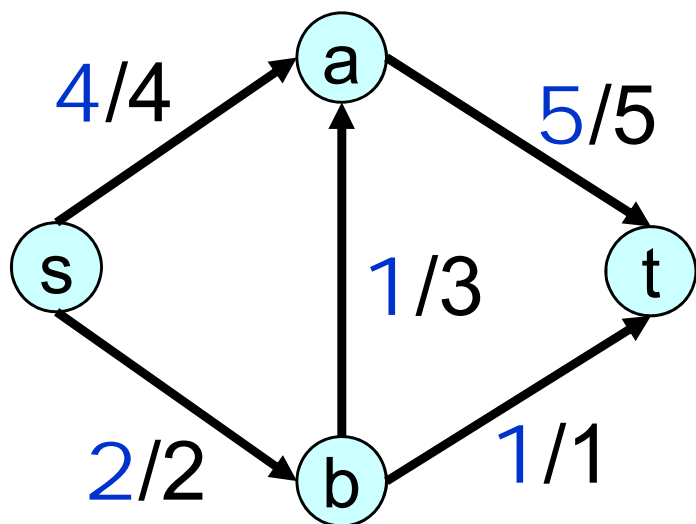
$$f = U(S, T)$$

レポート問題

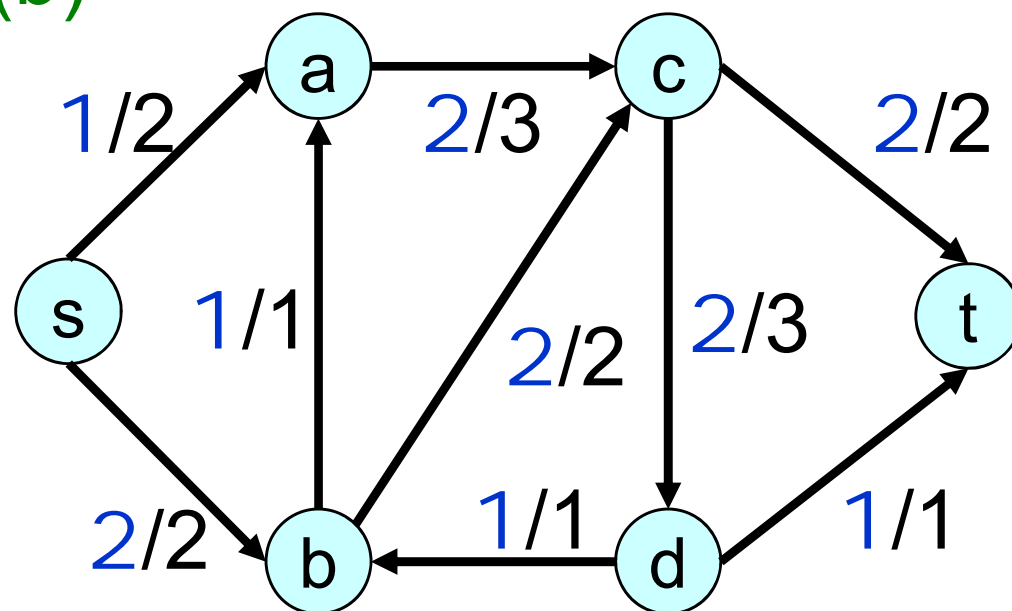


問 1 : 下記の図は, 最大流問題およびその最大流を表す. これらのフローに対し, 残余ネットワークを書きなさい.
また, 授業でやったやり方に従って最小カットを求めよ

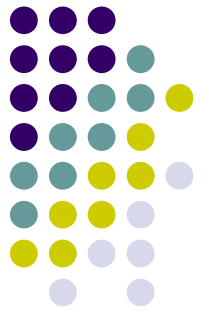
(a)



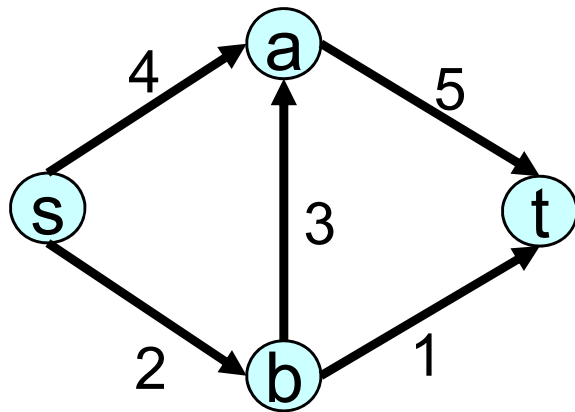
(b)



レポート問題



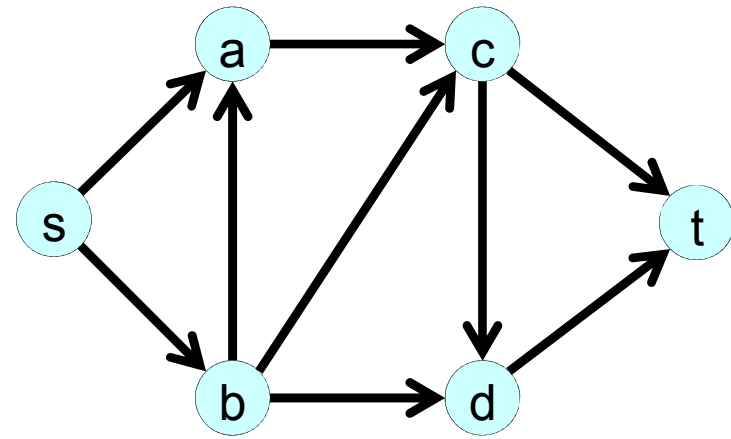
問 2 : 次のネットワークにおいて, $S=\{s, a\}$, $T=\{b, t\}$ としたときに, $x(S, T) - x(T, S) = f$ が成り立つことを, 下記の定式化を使って証明しなさい.

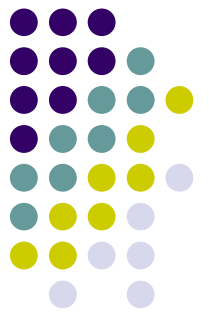


最大化 f
条件

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \leq x_{sa} \leq 4, 0 \leq x_{sb} \leq 2, 0 \leq x_{ba} \leq 3,$$
$$0 \leq x_{at} \leq 5, 0 \leq x_{bt} \leq 1$$





問 3 : 右のネットワークにおいて, 最小カットが $(\{s, b, d\}, \{t, a, c\})$ となるように, 各枝の容量を設定しなさい. (全部の枝の容量を 0 とするのは不可)





応用:プロ野球リーグの優勝可能性 判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

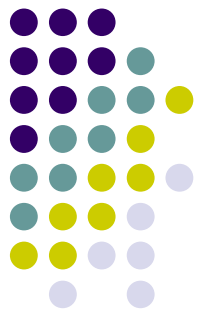
	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エク スポス
ブレー ブス 	83	71		1	6	1
フィ リーズ 	80	79	1		0	2
メッツ 	78	78	6	0		0
エク スポス 	77	82	1	2	0	

(2000年頃のデータ)

エクスポスの
優勝可能性





× 残り全勝して
も80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい



プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス 	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィ リーズ 	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ 	78	78	6勝 6	0		0
エクス ポス 	77	82	1	2	0	

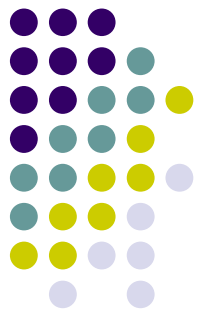
ブレーブスが全敗で
同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝





フィリーズの
優勝可能性



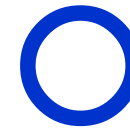


プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エク ス ポス
ブレー ブス 	83 83	71		1	6	1
フィ リーズ 	80 81	79	1		0	2
メッツ 	78 84	78	6	0		0
ナシヨナ ルズ 	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で
下位チームが
上位チームに
勝った場合



優勝の可能性は
ゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題



他の地区所属のチームとの試合

では、次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

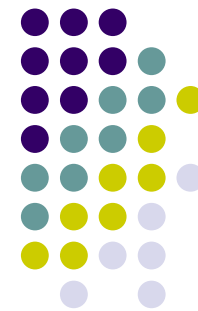
	勝	敗	残り試合数					レイズ	その他
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ			
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7	
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15	
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17	
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13	
レイズ	49	86	3	4	0	0		20	

レイズは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上 → 優勝の可能性？

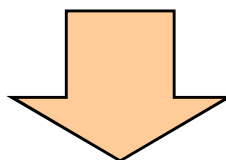
最大流問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題



レイズにとって都合の良いケースのみ考える

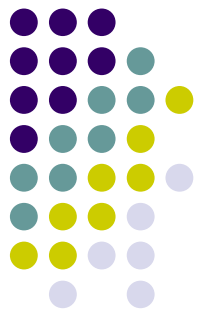
- レイズは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗



東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

- どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
→優勝の可能性なし
- あるケースにおいては、他チームは全て76勝以下
→優勝の可能性あり

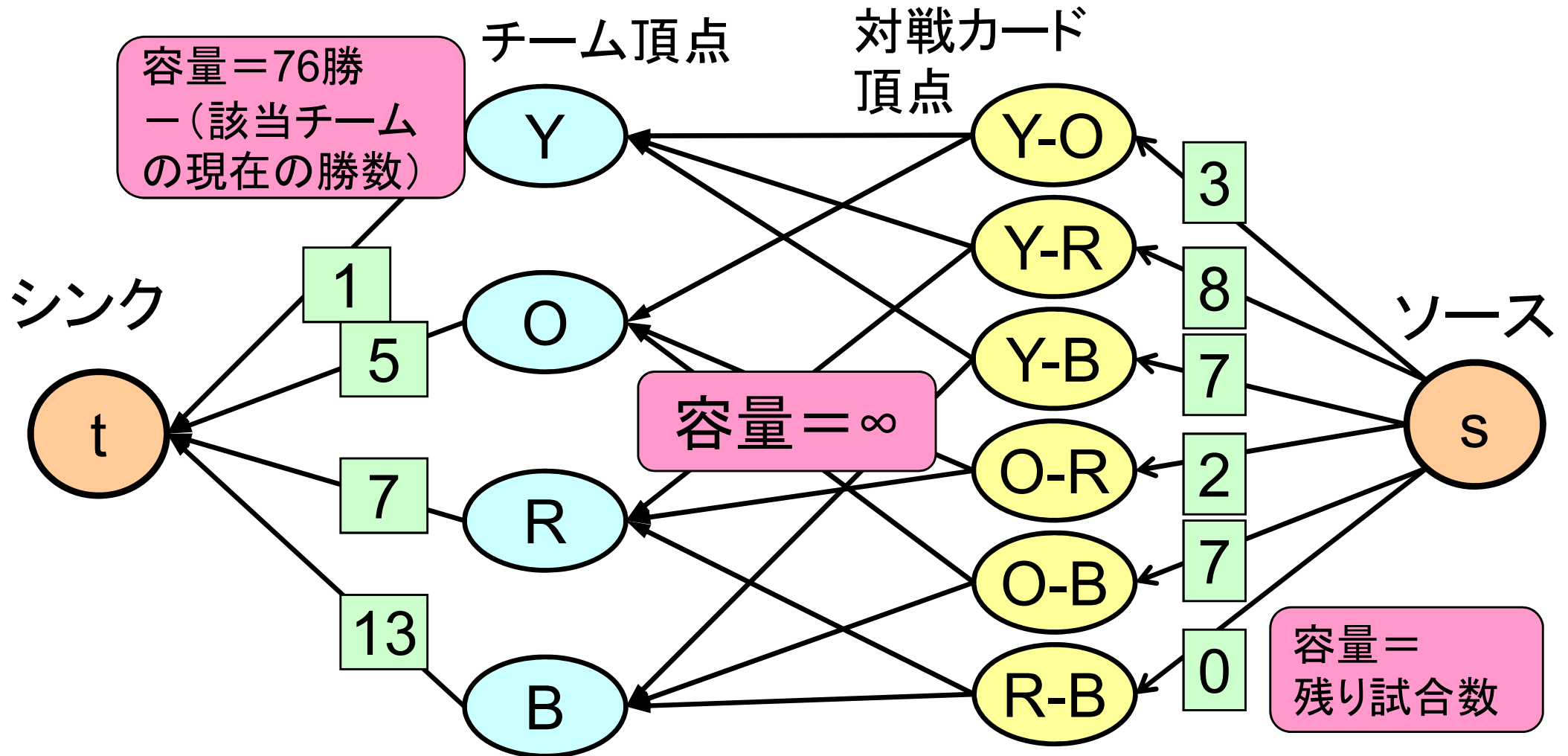
最大流問題に帰着



プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題

ネットワーク
の作り方

最大フローの流量 = 残り試合数の合計27
⇔ 優勝可能性が存在



プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題



Yの勝数はレイズの最大勝ち数76を超えてはいけません

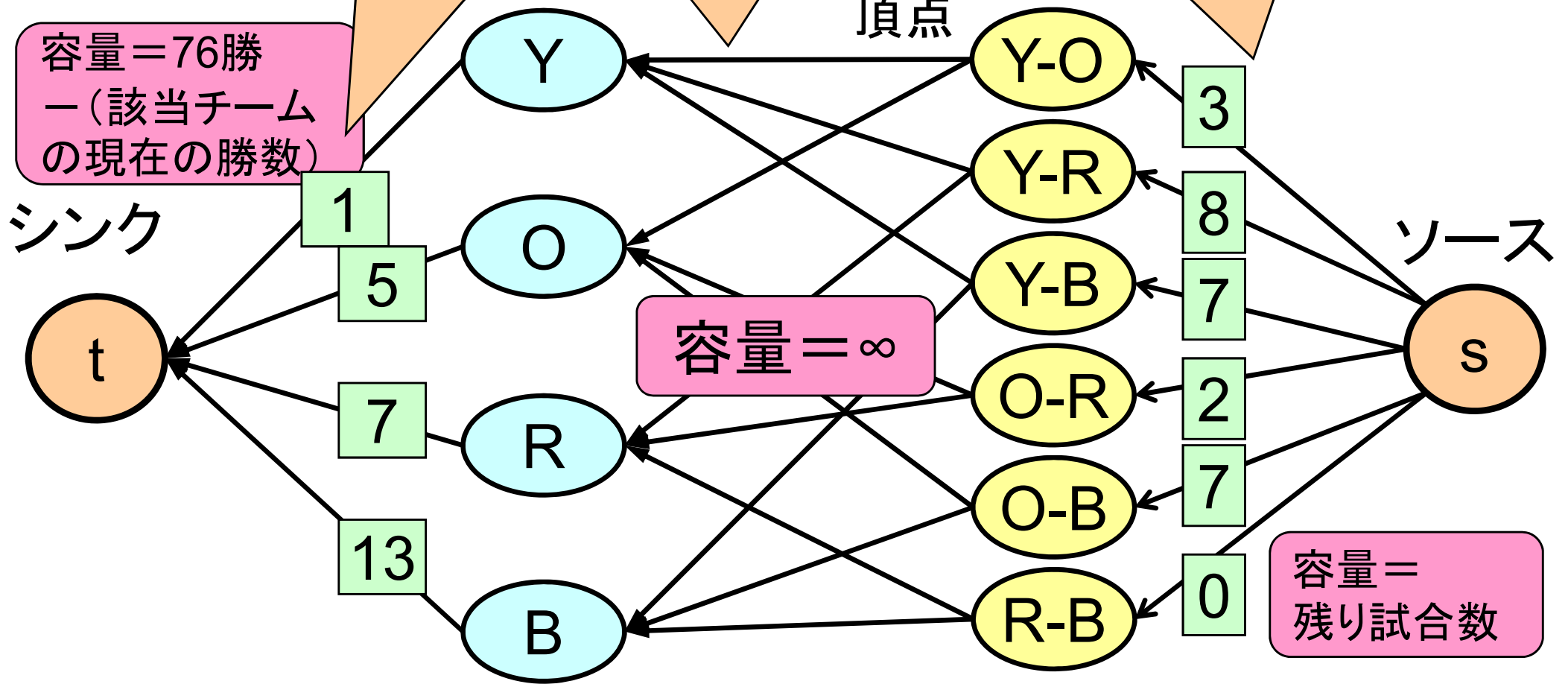
Yは各対戦カードから勝数を受け取る

YとOの対戦カードから合計3の勝数をYとOに供給

容量 = 76勝
- (該当チームの現在の勝数)

容量 = ∞

容量 = 残り試合数



プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大流問題



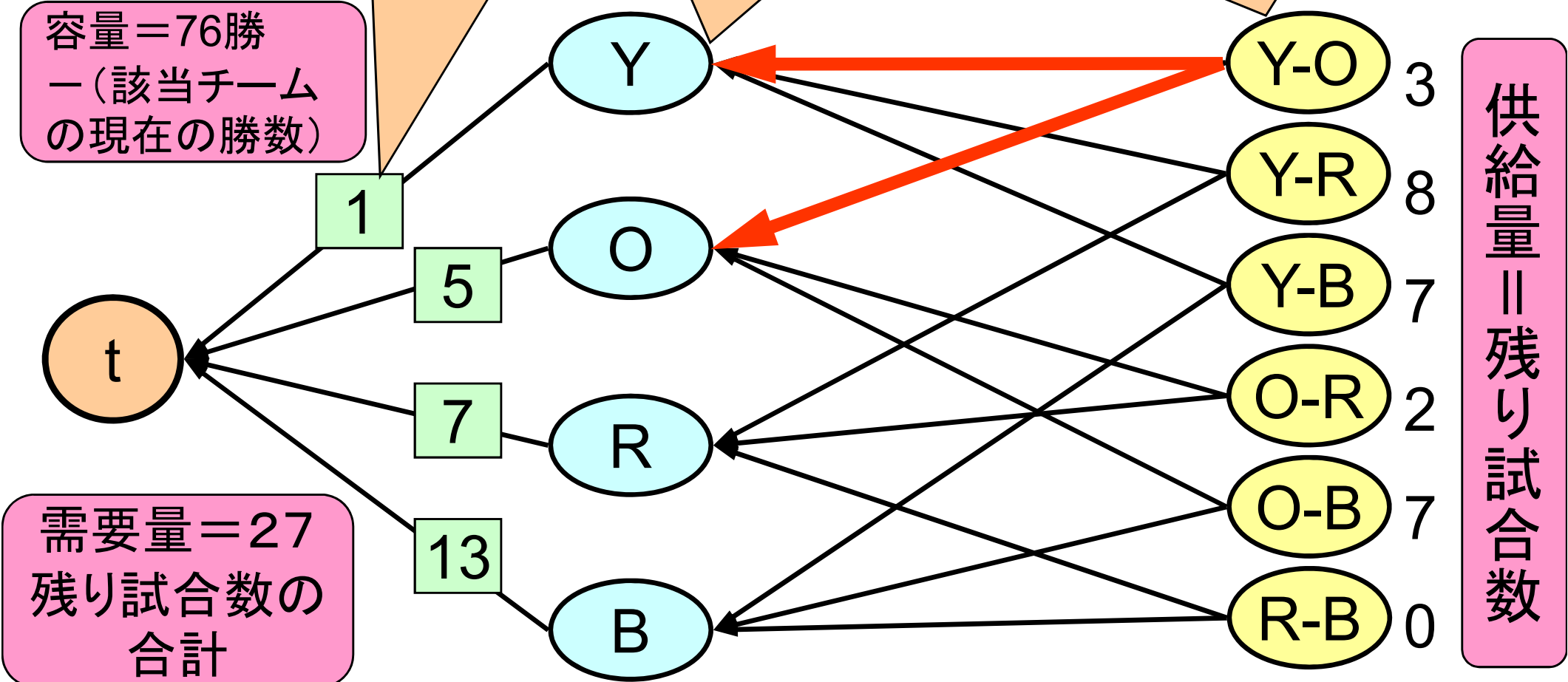
Yの勝数はレイズの最大勝ち数76を超えてはいけません

Yは各対戦カードから勝数を受け取る

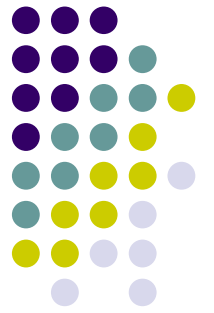
YとOの対戦カードから合計3の勝数をYとOに供給

容量 = 76勝
- (該当チームの現在の勝数)

供給量 || 残り試合数



演習問題(レポート提出の必要なし)



問題：ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ