

数理計画法 第3回

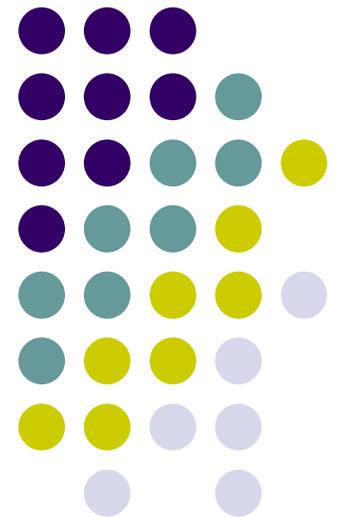
線形計画問題の諸定理

塩浦昭義 Akiyoshi Shioura

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

<http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching>





復習：主問題と双対問題

主問題 (primal problem)

$$\begin{aligned} \text{最小化: } & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{条件: } & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (dual problem)

$$\begin{aligned} \text{最大化: } & b_1y_1 + \cdots + b_my_m \\ \text{条件: } & a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & \vdots \\ & a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

主問題の i 番目の不等式

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$



双対問題の i 番目の変数

$$y_i \geq 0$$

主問題の j 番目の変数

$$x_j \geq 0$$



双対問題の j 番目の不等式

$$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$$

実行可能, 実行不可能



定義: 不等式標準形のLPに対し

- **実行可能(feasible)** \Leftrightarrow 許容解(実行可能解)が存在する
- **実行不可能(infeasible)** \Leftrightarrow 許容解(実行可能解)が存在しない

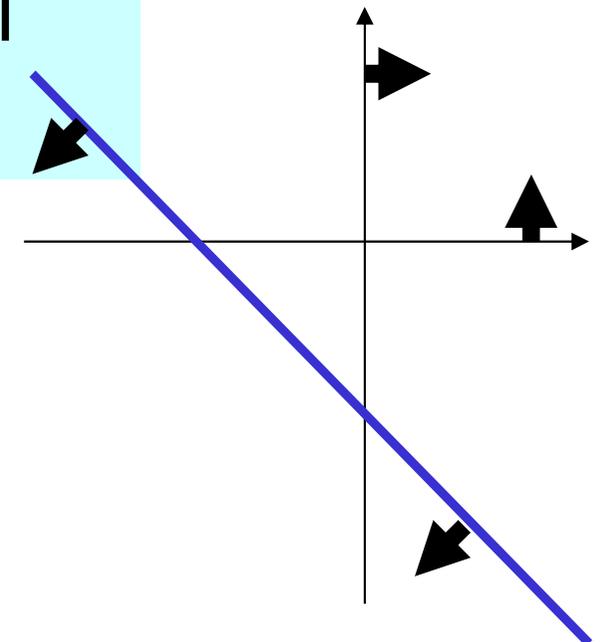
最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq -3$
 $x, y \geq 0$

実行可能

(1, 1)は許容解

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq 1$
 $x, y \geq 0$

実行不可能





有界, 非有界

定義: 実行可能なLPは (最小化の場合)

- 有界(bounded)
⇔ 任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded) ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq -3$
 $x, y \geq 0$

有界

目的関数値 ≥ 0

最小化 $-x - y$
条件 $x + y \geq 0$
 $x, y \geq 0$

非有界

任意の $\alpha > 0$ に対し (α, α) は許容解
目的関数値 $= -2\alpha$

LPの基本定理



定理3. 1 (基本定理, fundamental theorem)

任意のLPに対し、

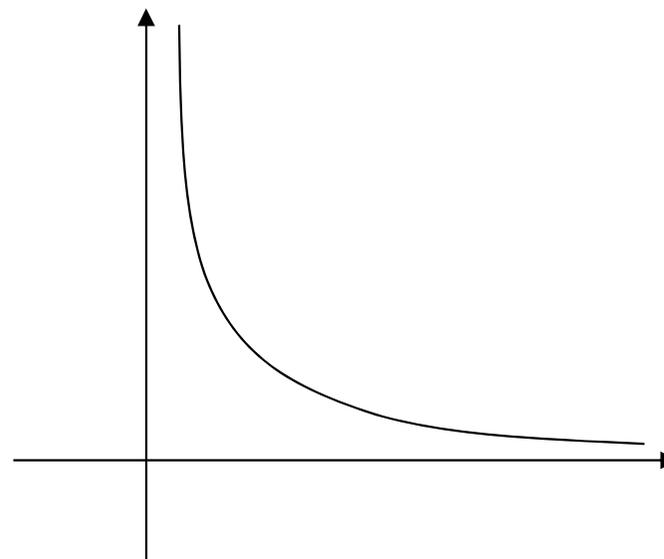
実行可能かつ有界 \Rightarrow **最適解が存在**

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & y \\ \text{条件} & xy \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

最適値 = 0

でも $y = 0$ なる許容解はない





弱双対定理

定理3. 2 (弱双対定理, weak duality theorem):

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値



弱双対定理の証明

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

最小化 $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

条件 $a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$

$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2$

...

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最大化 $b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$

条件 $a_{11} y_1 + \dots + a_{m1} y_m \leq c_1$

$a_{12} y_1 + \dots + a_{m2} y_m \leq c_2$

...

$a_{1n} y_1 + \dots + a_{mn} y_n \leq c_n$

$y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$



弱双対定理の系

系3. 1

主問題が**非有界** \Rightarrow 双対問題は**実行不可能**

双対問題が**非有界** \Rightarrow 主問題は**実行不可能**

証明: 対偶（双対: 実行可能 \Rightarrow 主: 有界）を示す

双対問題が実行可能と仮定

y : 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$$\sum c_j x_j \geq \alpha \quad \therefore \text{主問題は有界}$$



弱双対定理の系

系3. 2

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解,

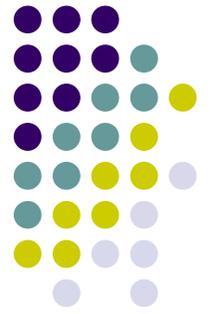
$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i \text{ を満たす}$$

$\Rightarrow \mathbf{x}$: 主問題の最適解、 \mathbf{y} : 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理3. 2)を使って証明すること

弱双対定理の系



例3.3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$

$-2y_1 \quad - 3y_3 \leq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解

$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒ 系3.2より、 x, y はそれぞれ最適解

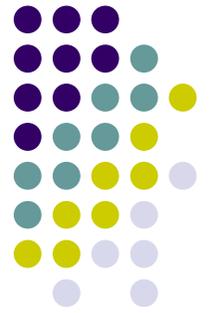


双対定理

定理3.3 (双対定理, duality theorem) :
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ



			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ (双対定理)	× (系3.1)	× (双対定理)
		非有界	× (系3.1)	× (系3.1)	○ (系3.1)
	実行不可能	× (双対定理)	○ (系3.1)	○	

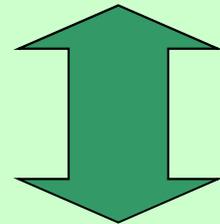
相補性定理 (complementarity slackness theorem)



定理3.4:

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

x および **y** は最適解



相補性条件
(complementarity
slackness condition)

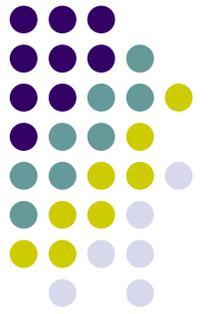
各 $j = 1, \dots, n$ について

$\sum_i a_{ij} y_i \leq c_j$ と $x_j \geq 0$ のどちらかは等号成立

各 $i = 1, \dots, m$ について

$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ と $y_i \geq 0$ のどちらかは等号成立

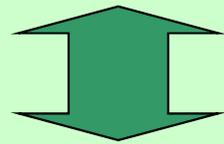
相補性定理の証明



x: 主問題の許容解

y: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解



$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j \quad \text{または} \quad x_j = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \text{または} \quad y_i = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \dots, m)$$

証明: 弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

x、**y**が最適 \Leftrightarrow 最初の項 = 最後の項

$$\Leftrightarrow (\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j, (\sum_j a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i \quad \Leftrightarrow \text{相補性}$$



レポート問題

問1: 系3. 2を証明せよ.

問2: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \geq -3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$



レポート問題

問3: 右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて(具体的に)書きなさい.

(c) [P] の最適解のひとつは $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$ である.

相補性定理を使って, 双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい. 計算の過程も書くこと.

$$[P] \quad \left| \begin{array}{llll} \text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\ & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\ & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$