

# 2012 年度 数理計画法 中間試験問題 [50 点満点]

2012 年 12 月 29 日(木)13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

## 問 1

(1) 右の線形計画問題を不等式標準形に書き換えよ。計算過程も書くこと。

$$\begin{aligned} \text{最大化: } & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{条件: } & 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 双対問題が実行不可能となるような線形計画問題の例を書け。

ただし、変数の数と制約の数はいずれも 2 つ以下とする。

また、この例において、双対問題が実行不可能となることを説明せよ。

(3) 以下の 2 つのナップサック問題は、あるナップサック問題を分枝限定法で解いたときに得られた部分問題である。これらの問題の緩和問題を解くとともに、分枝操作と限定操作のどちらが適用可能か、説明せよ。また、その理由も書け。ただし、暫定値は 30 として判定せよ。

(A) 最大化  $7x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 8x_4$   
 条件  $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 7$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

(B) 最大化  $7x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 4x_4$   
 条件  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

## 問 2

(1) 次のような線形計画問題の主問題(P)と双対問題(D)を考える。

(P) 最小化:  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$   
 条件:  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$   
 $\vdots$   
 $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$   
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

(D) 最大化:  $b_1y_1 + \dots + b_my_m$   
 条件:  $a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$   
 $\vdots$   
 $a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$   
 $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$

線形計画問題の弱双対定理とは、次のような定理である。

主問題(P)の任意の許容解  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と双対問題(D)の任意の許容解  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  に対して、  

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n \geq b_1y_1 + \dots + b_my_m$$
  
 が成り立つ。

弱双対定理を用いて、以下のことを証明せよ：

主問題(P)のある許容解  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  と双対問題(D)のある許容解  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  に対して、

$$c_1x_1^* + \dots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + \dots + b_my_m^*$$

が成り立つとき、 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  は主問題(P)の最適解である。

(問 2 は次のページに続く)

### (問2の続き)

(2) 右の線形計画問題が許容解をもつか否かを判定したい。

その際、補助問題を使うと便利である。

(2-1) この問題に対する補助問題を書け。結果のみ書けば良い。

(2-2) 許容解をもつか否かについて、補助問題を使って判定する方法を説明せよ。なお、補助問題を解く必要はない。

また、その方法の妥当性を証明する必要はない。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -2x_1 - 4x_2 \\ \text{条件} & -x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

### 問3

右の線形計画問題(P)について考える。

(1) この問題の許容解領域(許容解全体の集合)を図示せよ。

(2) この問題の辞書を書け(結果のみ書けば良い)。

また、その辞書の基底変数と非基底変数を(すべて)書け。

(2) この問題の基底解をすべて書け(結果のみ書けば良い)。

また、各々の基底解が許容解領域のどの点に対応するか、説明せよ。

(ヒント: 基底解を計算する際、ピボット演算は必ずしも使う必要はありません)

$$\begin{array}{ll} \text{(P) 最小化} & -2x_1 - 4x_2 \\ \text{条件} & -x_1 - x_2 \geq -4 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

### 問4

問3の線形計画問題(P)の最適解を求めたい。

(1) この問題(P)に対して単体法を使って最適解を求めよ。ただし、**最小添字規則を使う**とともに、**各反復で用いた辞書やピボット演算で入れ替えた変数を明記**すること。

(ヒント: 初期辞書は許容辞書である)

(2) 問題(P)の**双対問題(D)**を求めよ。また、(P)と(D)に対する**相補性条件**を書け。

(3) 問題(P)の最適解のひとつは  $x_1 = 0, x_2 = 3$  である。このことと相補性条件(相補性定理)を使って、双対問題の**最適解をすべて**計算せよ。