数理計画法　第10回

3章 ネットワーク計画

最小費用流問題と負閉路除去法

担当:　塩浦昭義

(情報科学研究科　准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習:最大フロー問題

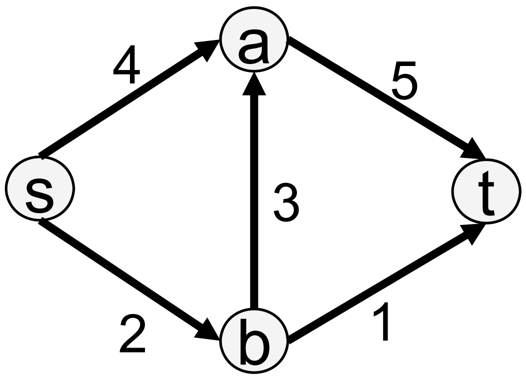
目的:供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい
条件1(容量条件):

0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量

条件2(流量保存条件):

頂点から流れ出すフローの量＝ 流れ込むフローの量

問題例と定式化



最大化 f

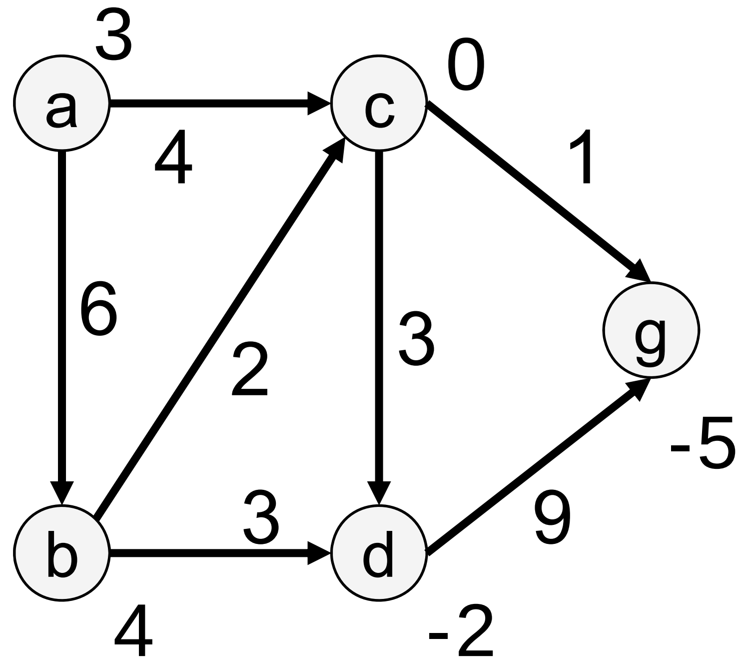
条件

$$
\begin{aligned}
&x_{sa} + x_{sb} = f \\
&x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0 \\
&x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0 \\
&-x_{at} - x_{bt} = -f \\
&0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3, \\
&0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1
\end{aligned}
$$

応用:供給･需要を満たすフローを求める

入力：有向グラフ G = (V, E)
各枝 (i, j) ∈ E の容量 u_{ij} ≧ 0
各頂点 i ∈Vの供給･需要量 b_i（ただし b_i の和は0）
(b_i >0➔ i は供給点，<0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

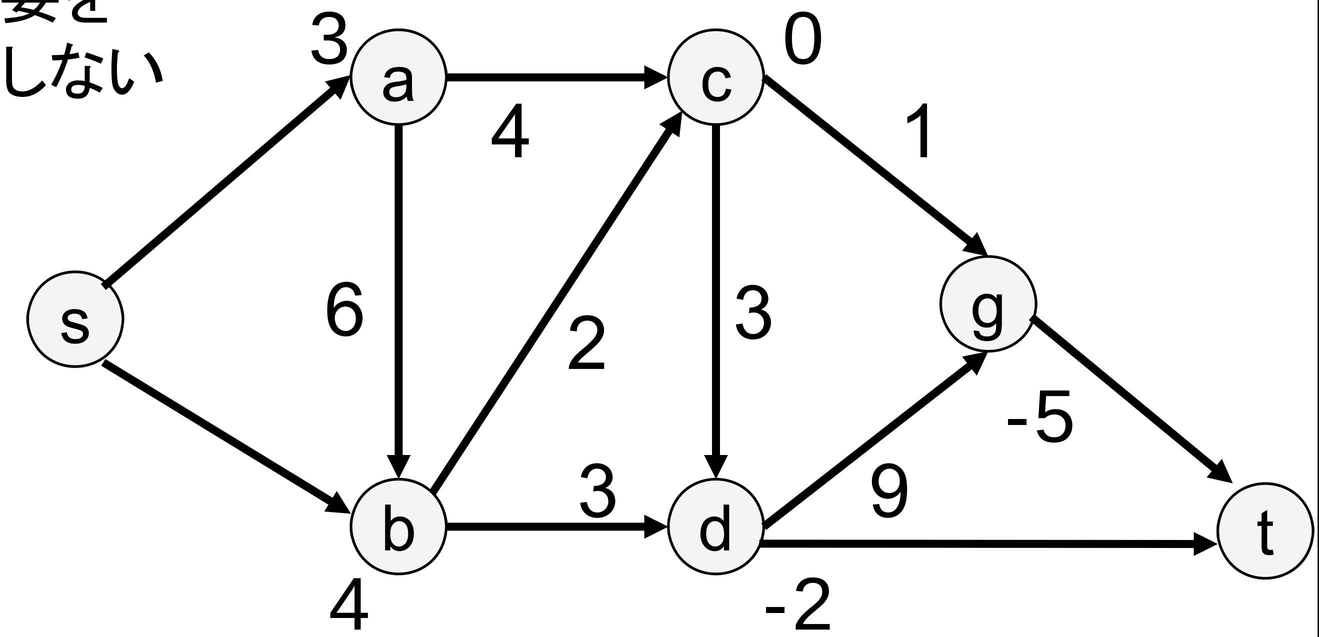
出力：次の条件を満たすフロー
●各頂点 i ∈V での供給･需要条件
（i から流出するフロー量）
ー（i に流入するフロー量）＝b_i
●各枝 (i, j) の容量条件
$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$



応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大フロー問題に帰着する

(1)新たな頂点 s（ソース）, t（シンク） を追加
(2)$b_i > 0$ ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)$b_i < 0$ ならば枝(i, t)を追加，容量は - b_i
(4)最大フローを求める.
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を満たすフローは存在しない



最小費用流問題
(Minimum Cost Flow Problem)

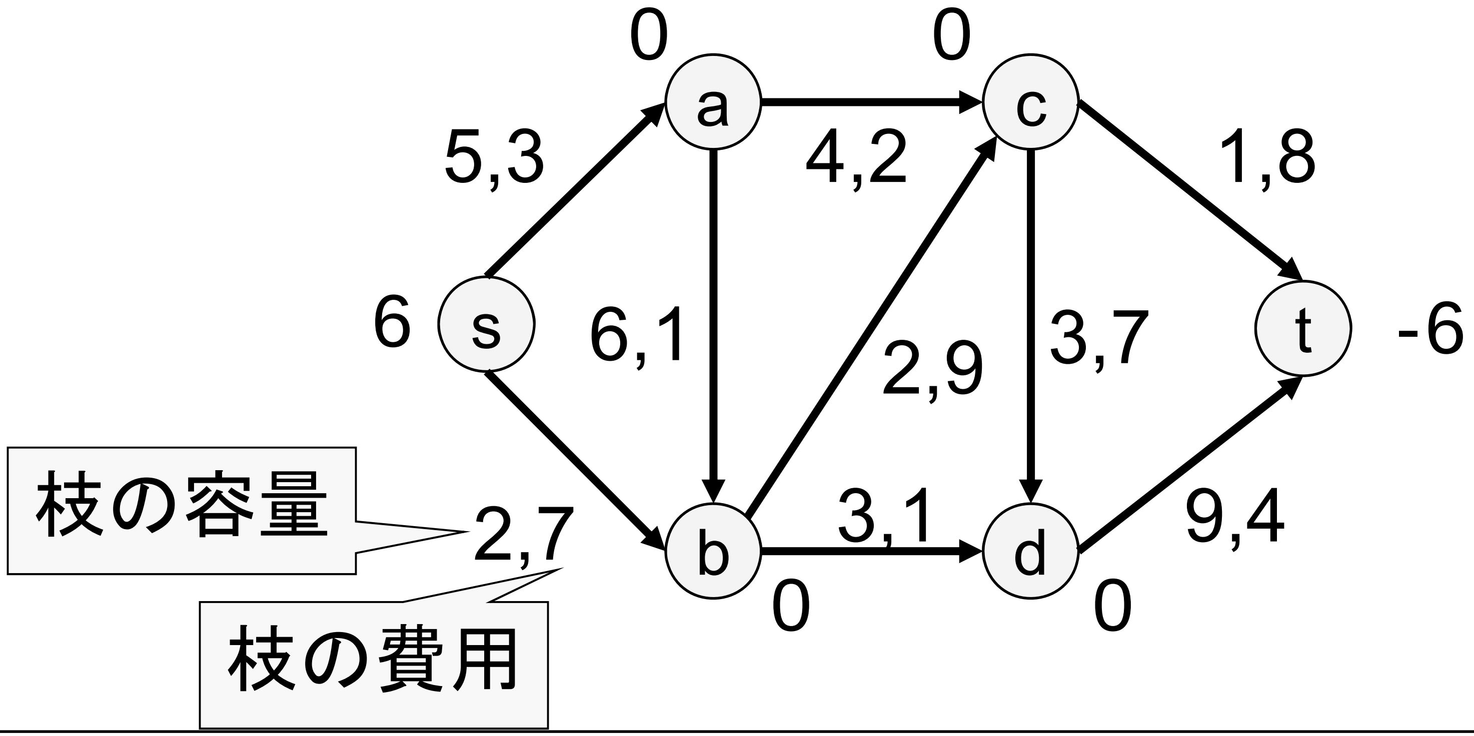
入力：有向グラフ G = (V, E)

　　各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

　　(b_i >0➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

　　各枝 (i, j) ∈ E の容量 u_{ij} ≧ 0, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題：定式化

目的関数：$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$ →最小化

（各枝の費用×フロー量）の和

制約条件　$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$　$((i,j) \in E)$

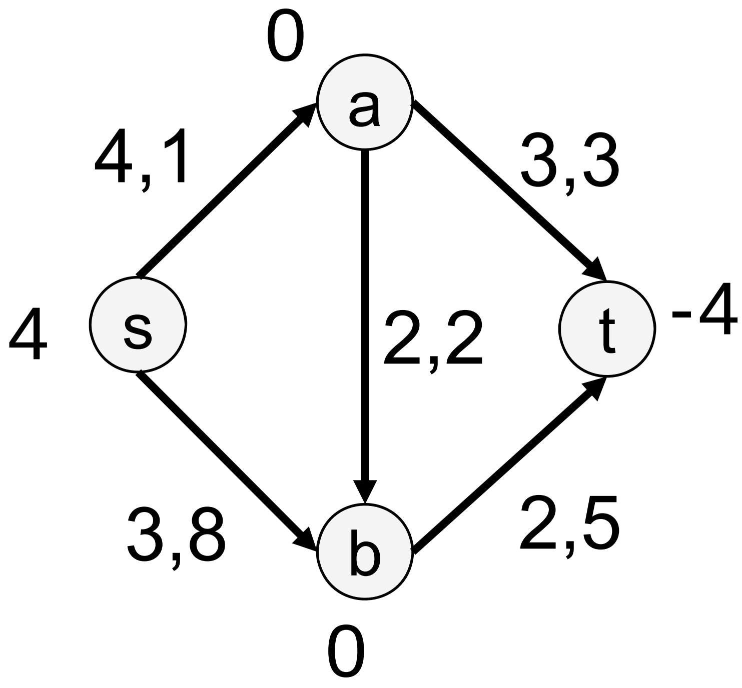
各枝の容量条件

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る枝$\}$
$- \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る枝$\} = b_i$　$(k \in V)$

各頂点での流量保存条件（需要供給量に関する条件）

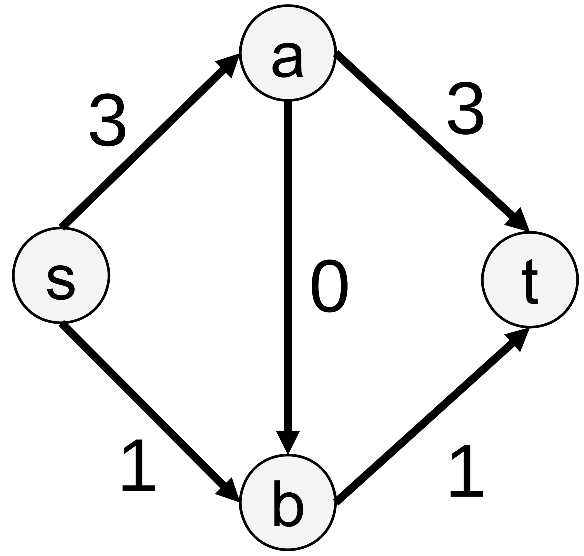
これは線形計画問題

フローの最適性判定 (Optimality Check)



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方（その1）

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

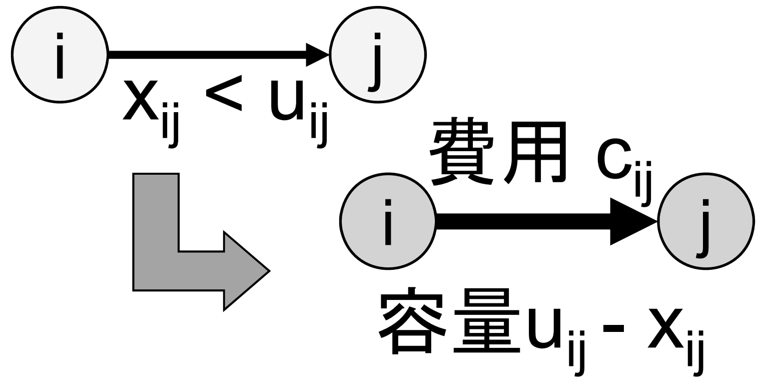
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

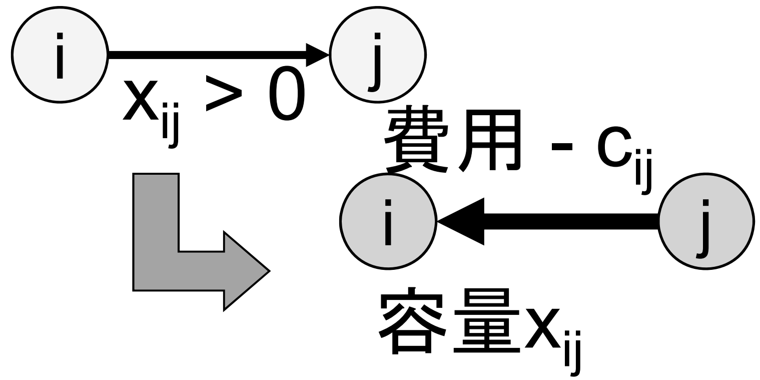
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



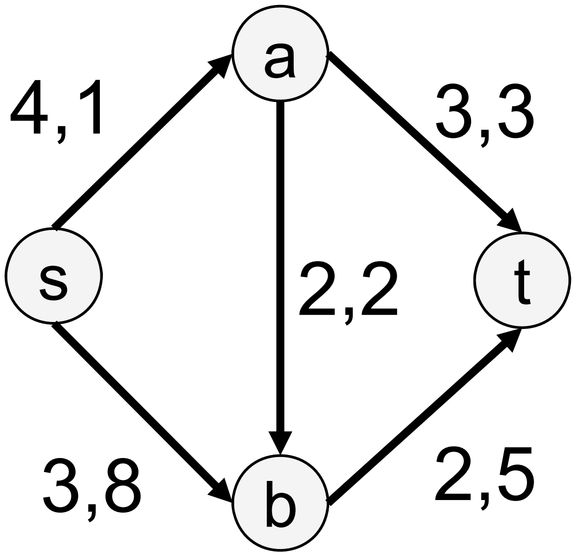
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

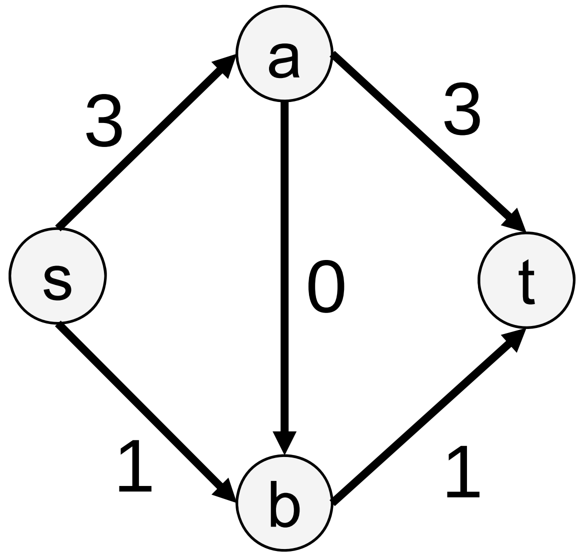
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $- c_{ij}$



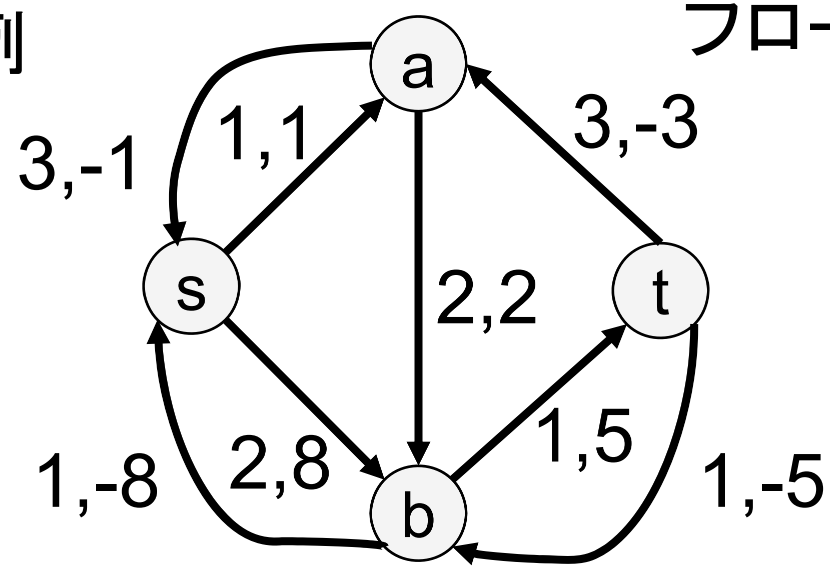
残余ネットワークの作り方（その2）



問題例



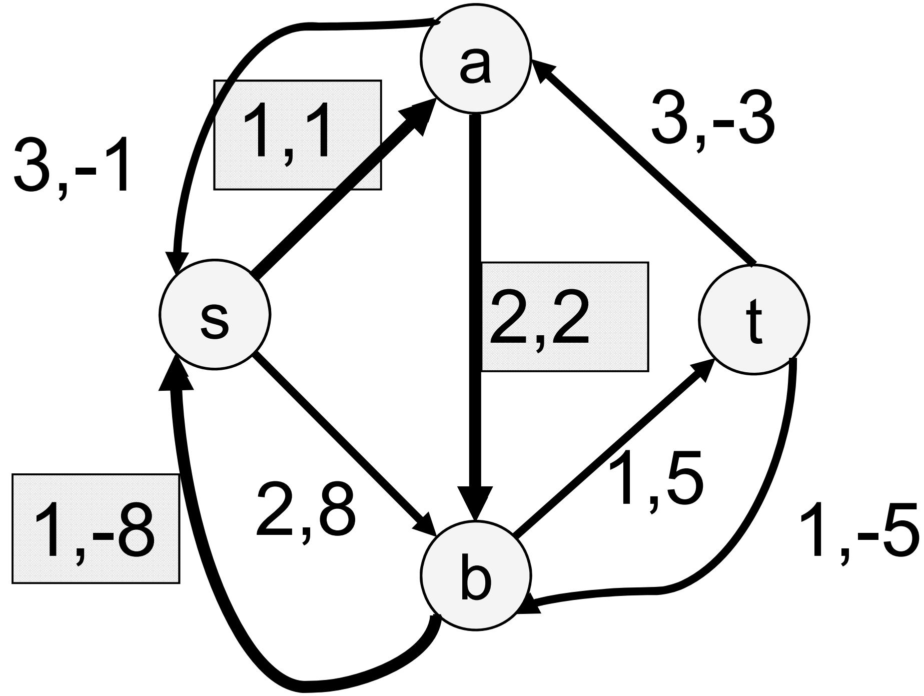
フローの例



残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(その1)

残余ネットワークの閉路に注目

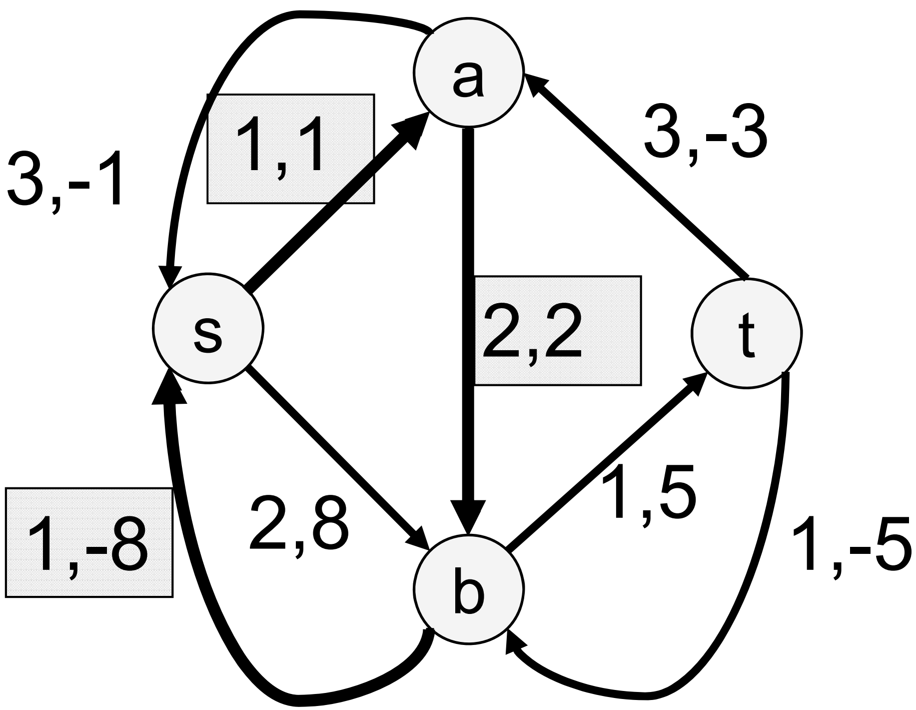


閉路の容量α
＝閉路に含まれる枝の容量の最小値=1
閉路の費用γ
＝閉路に含まれる枝の費用の和=-5

残余ネットワークの性質(その2)

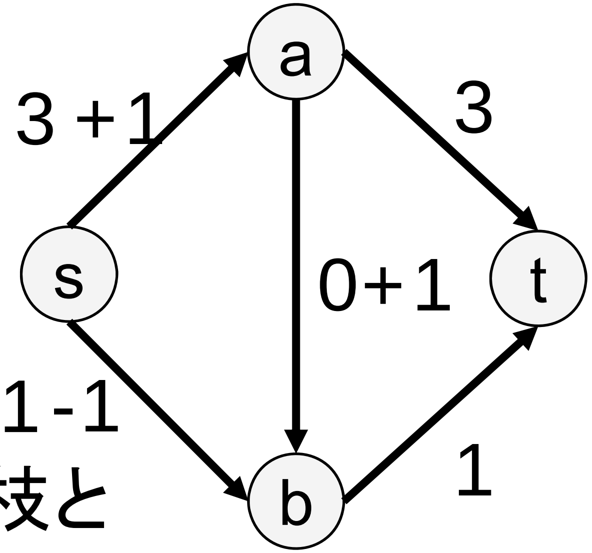
残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

残余ネットワーク



閉路の容量α=1
閉路の費用γ=-5

フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋α
逆の向き⇒フロー値に−α
無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用はαγ(＝－5)増加

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

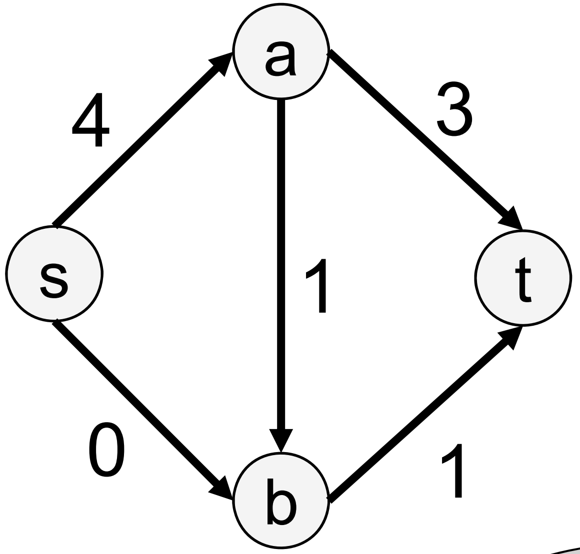
定理１ ：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ(証明は省略)

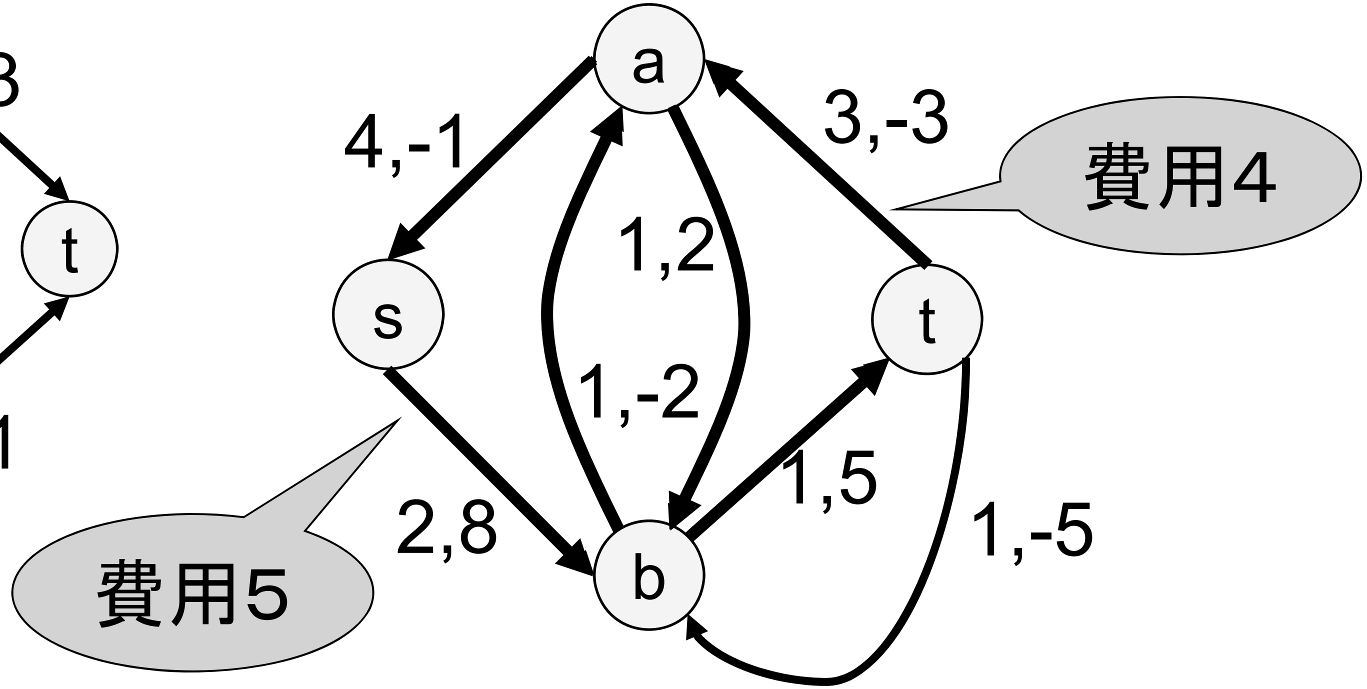
定理２ ：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー



残余ネットワーク



費用が負の閉路がない

⇒ 現在のフローは費用最小

負閉路除去法

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて、需要供給量を満たす
フローを求める
ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る
ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が
存在しない⇒ 現在のフローは費用最小（終了）
ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、
それを用いて現在のフローを更新する
ステップ4：ステップ1へ戻る

負閉路除去法の計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定
　U = 枝容量の最大値，
　C = 枝費用の絶対値の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU
　　➔ 反復回数 ≦ 2mCU

- 各反復での計算時間
　＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間

➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は $O(m^2 n C U)$
（入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間）

負閉路除去法の改良

負閉路除去法の反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

（改良法１） 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
反復回数 O(m log (n U))
ただし，費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
➔ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

（改良法２）
“（閉路の費用）／（閉路の枝数）”が最小の負閉路を選ぶ
反復回数 O(n m^2 log n)，一回の反復 O(n m)

※この他にも，負閉路除去法の計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

最小費用フロー問題の応用例:
研究室配属問題

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

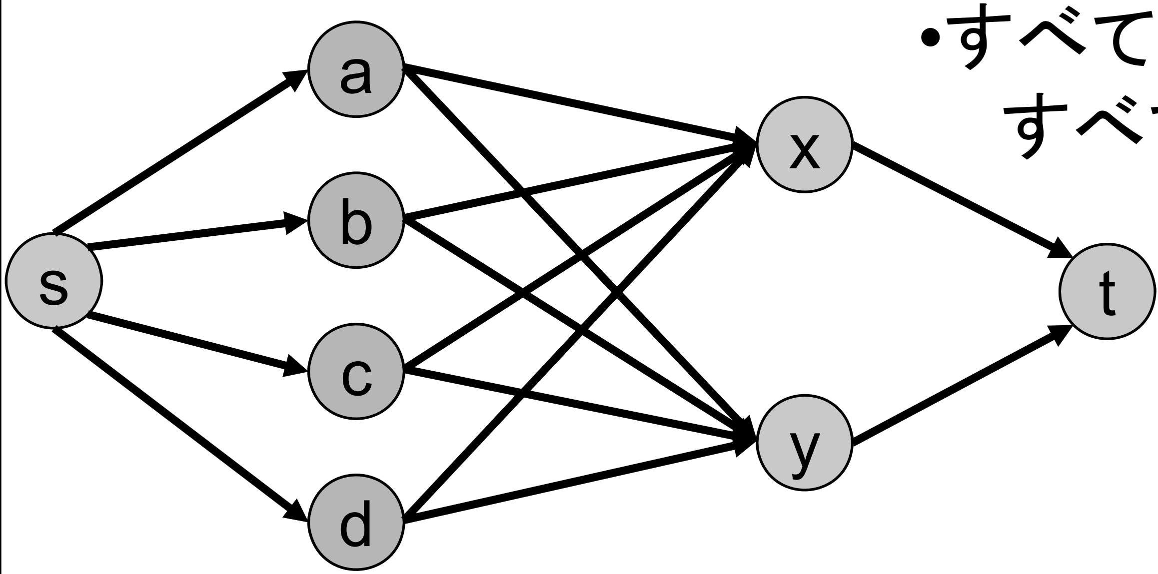
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題

最小費用フロー問題に変形

- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d （通過点）
- 各研究室に対応する頂点 x, y （通過点）
- 供給点 s, 需要点 t

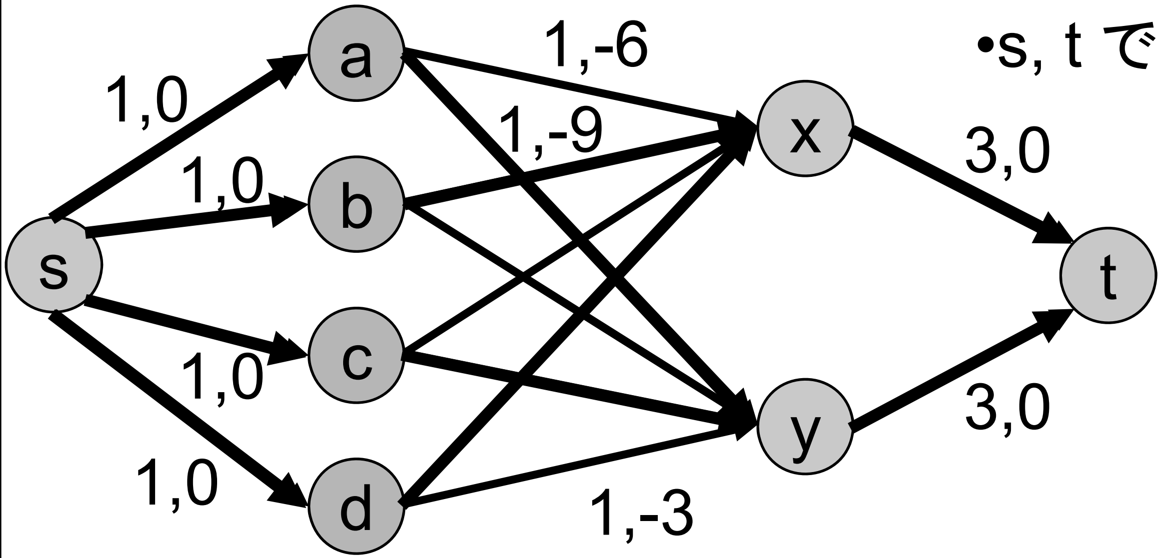
- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)



- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例:研究室配属問題

•供給点から学生頂点への枝:容量1、費用0
•研究室頂点から需要点への枝:容量=研究室の定員、費用0
•学生頂点から研究室頂点への枝:容量1、費用=(−1)×満足度



•s, t での需要(供給)量=学生数

学生B,D→X研究室
学生A,C→Y研究室

この問題の(整数値)フロー⇔定員を満たす配属方法
フローの費用⇔(−1)×学生の満足度の合計
∴最小費用フロー問題に変形できた

他のネットワーク最適化問題との関係

- 最短路問題
- 最大フロー問題

これらの問題は最小費用フロー問題に変換可能
（最小費用フロー問題の特殊ケース）

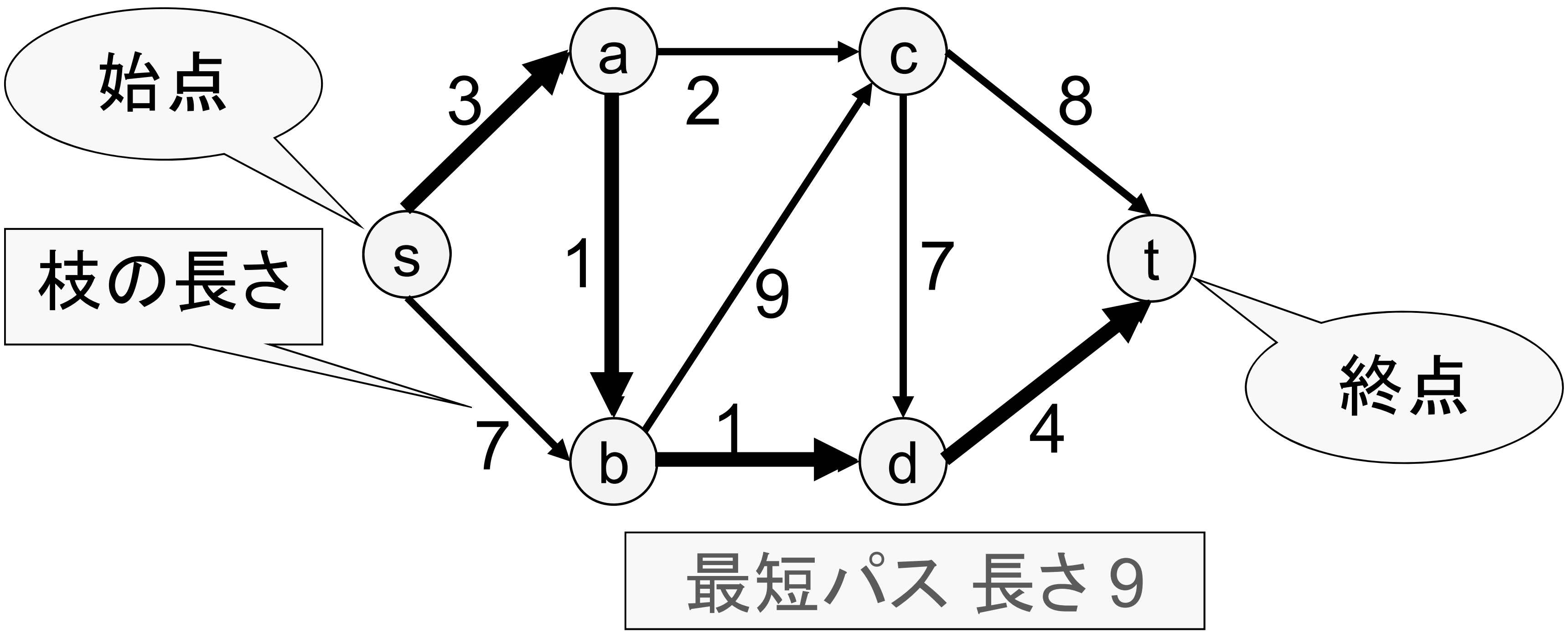
最短路問題との関係

最短路問題の定義

入力: 有向グラフ G = (V, E)

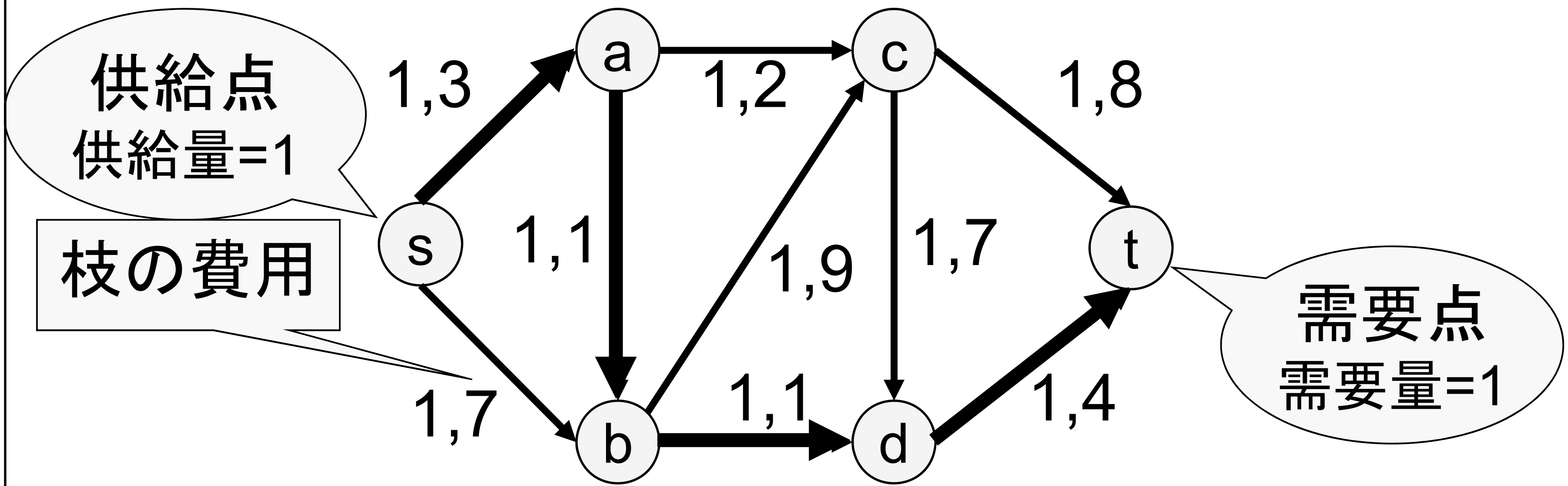
始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$, 各枝 $(i, j) \in E$ の長さ c_{ij}

出力: s から t までの長さ最短のパス



最短路問題との関係

最短路問題から最小費用フロー問題への変換
始点➔供給点，終点➔需要点，需要(供給)量＝1
枝の長さ➔枝の費用，各枝の容量＝1

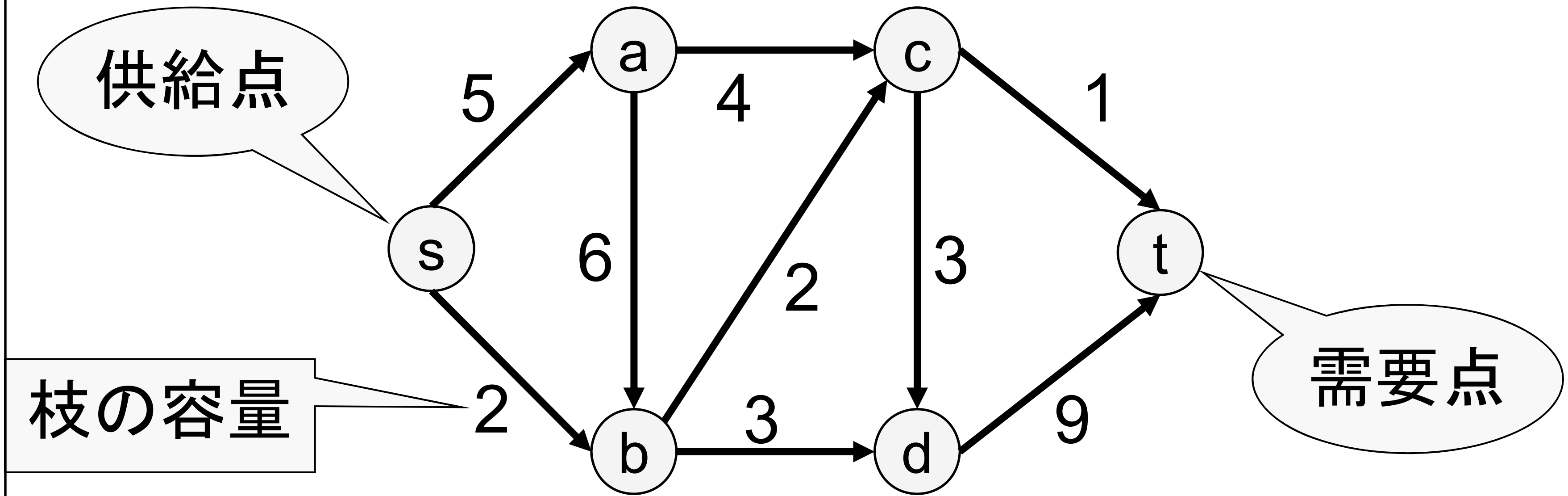


最小費用(整数)フローを求める
➔ 最短 s-t パスを流れるフローになる

最大フロー問題との関係

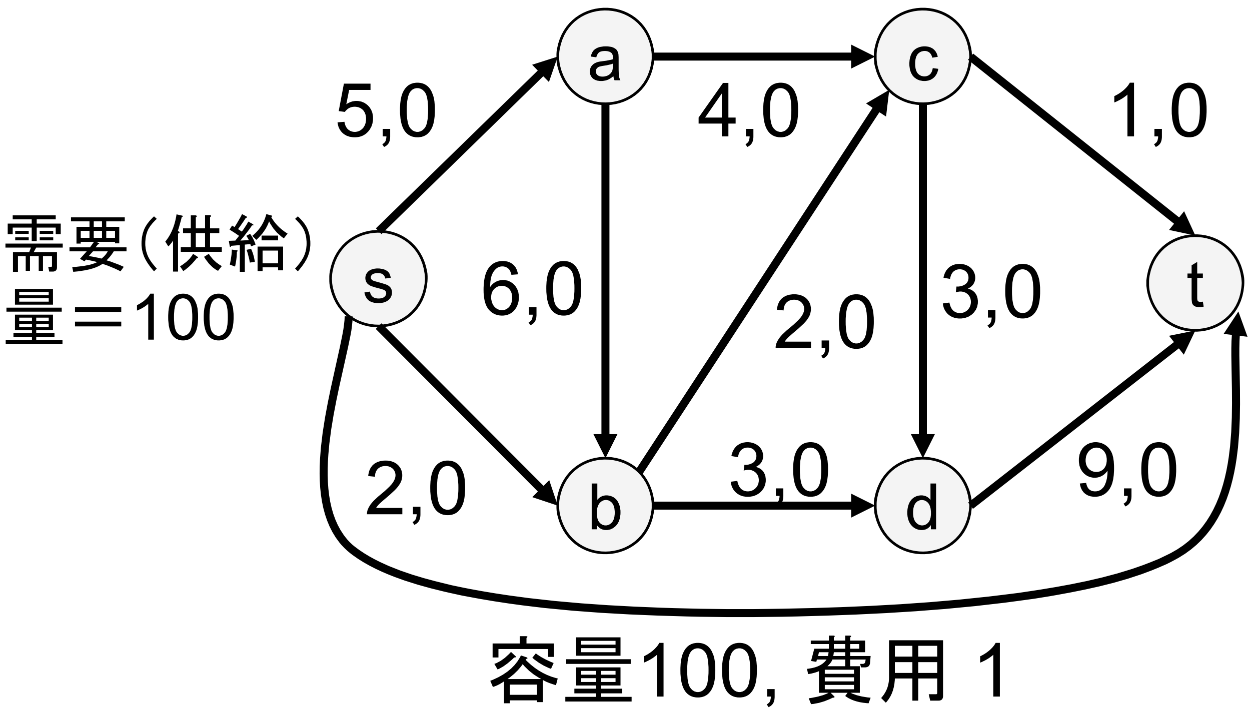
入力: 有向グラフ G = (V, E)
　　　供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,
　　　各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$

出力: フロー値が最大のフロー



最大フロー問題との関係

最大フロー問題から最小費用フロー問題への変換
新たな枝(s,t)の追加：容量=U（十分大きい値）, 費用=1
元々の枝の費用=0
s の需要・供給量＝U, t の需要・供給量＝ - U

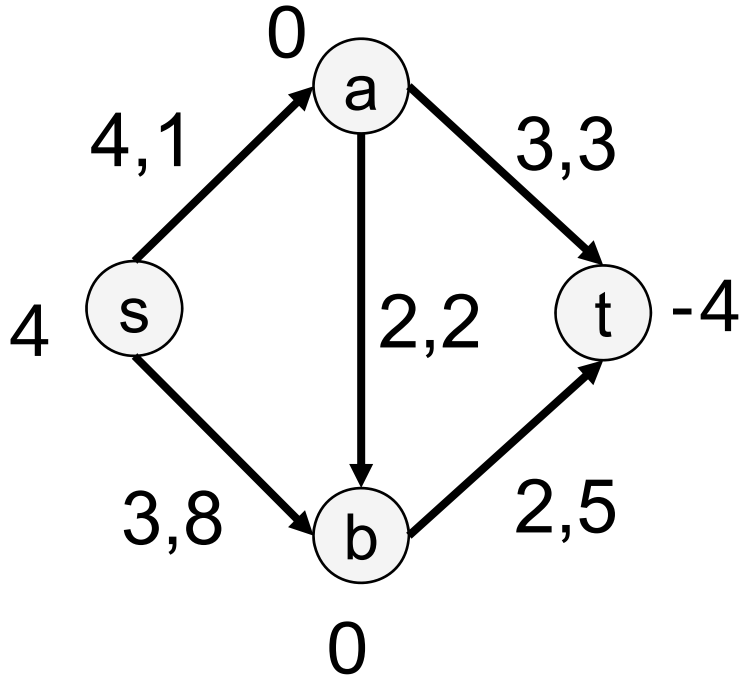


最小費用フローを求める
➔元々の枝を流れるフローは最大フローになっている

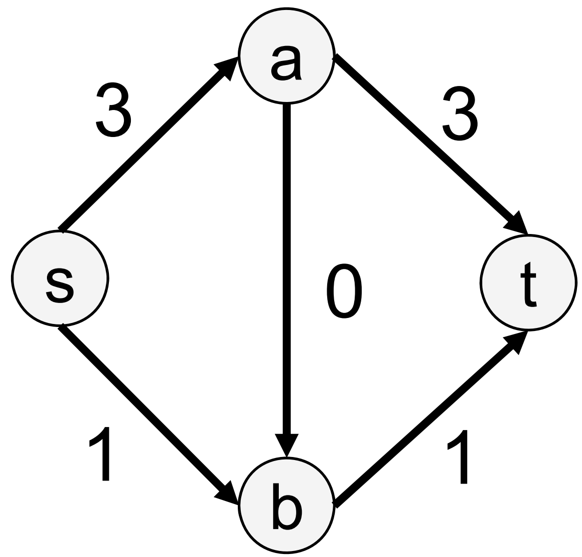
レポート問題

問1: 次の最小費用フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）与えられた初期フローに対して負閉路除去法を適用し，
　最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(a)

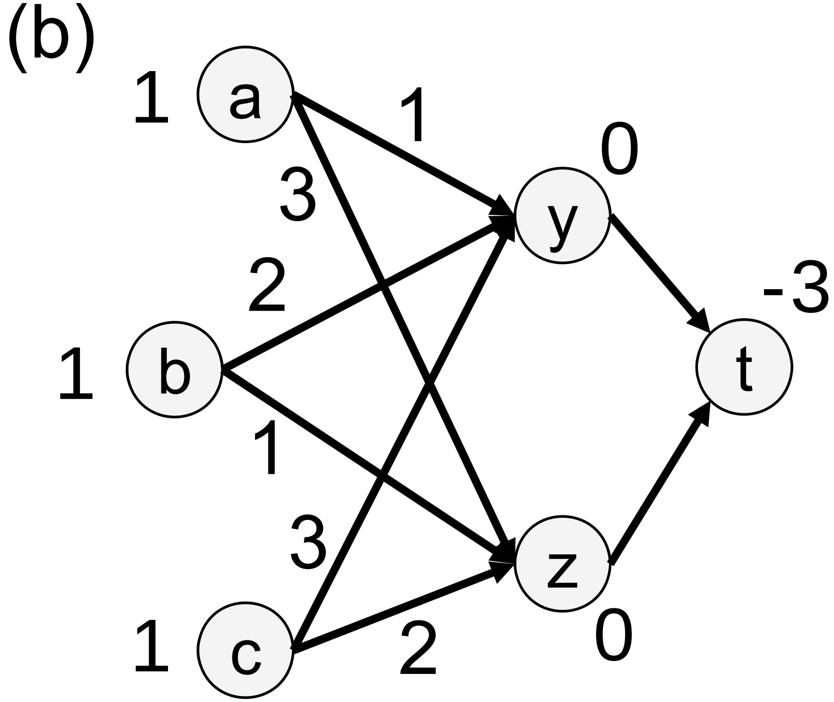


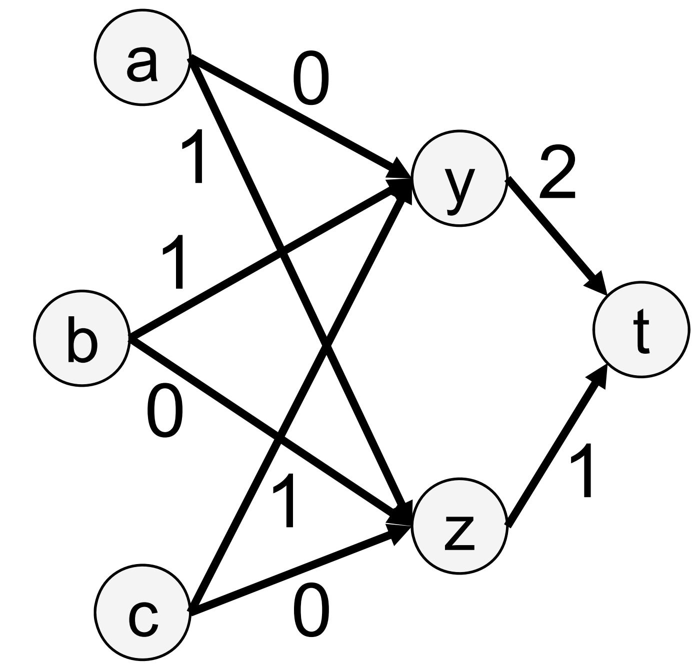
初期フロー



レポート問題

問2: 次の最小費用フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）与えられた初期フローに対して負閉路除去法を適用し，
最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）





枝(y, t), (z, t) の容量は3，それ以外の枝の容量は1
t に入る枝の費用は0，それ以外は各枝の数値を参照