数理計画法　第9回

第3章 ネットワーク計画

§3.3 フロー増加法の正当性と最大流最小カット定理

担当:　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

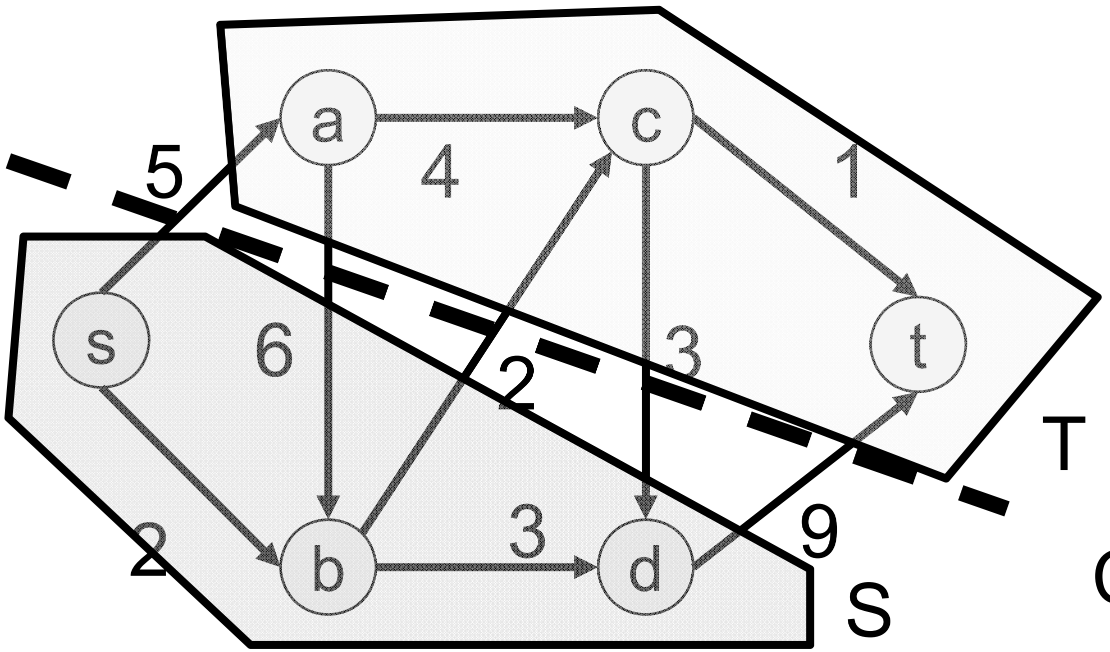
カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこにあるか？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（$S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$）

S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和



C(S,T)=5+2+9=16

カットの性質(その1)

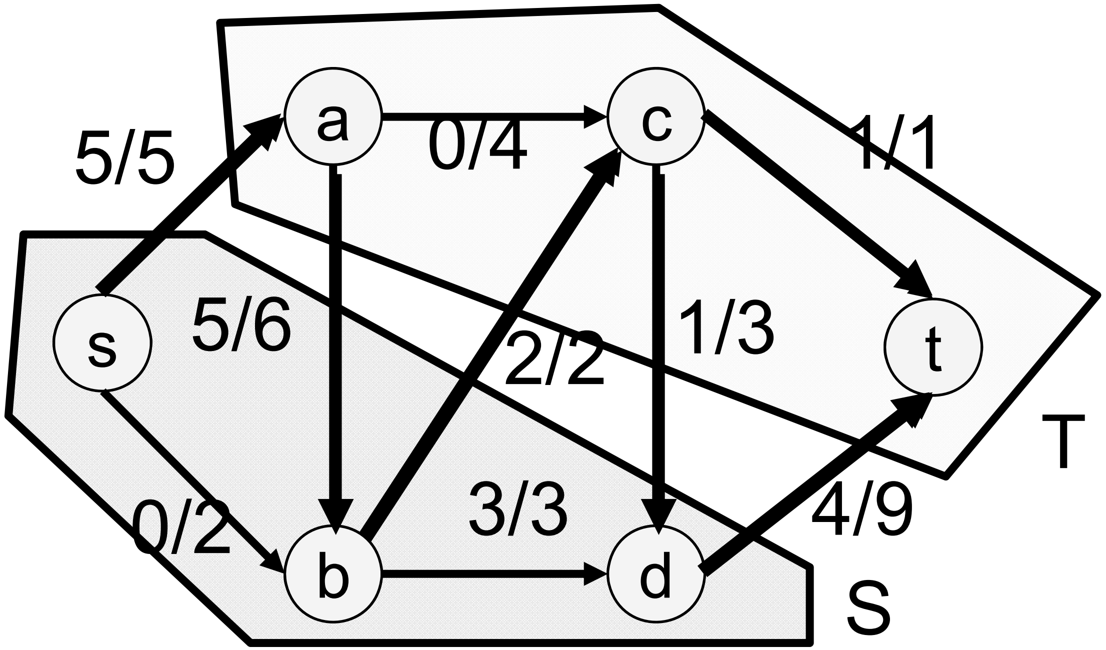
性質1：

任意のカット(S, T) と任意のフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフロー量の和 x(S,T)

ー TからSへの枝のフロー量の和 x(T,S)

＝ フローの流量 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

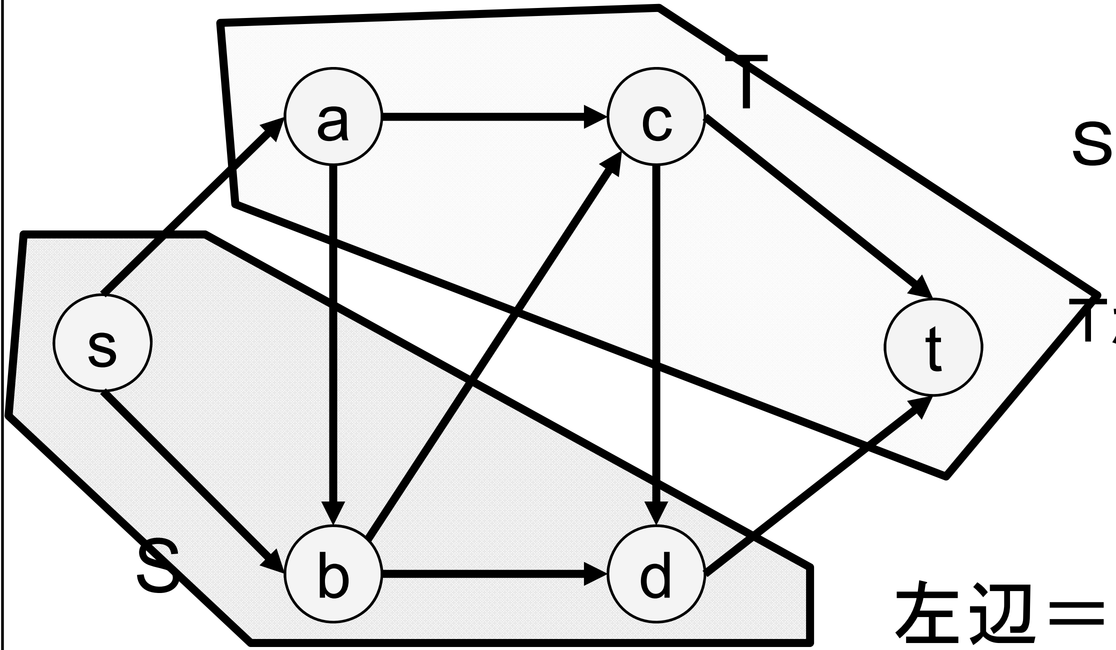
f = 11 – 6 = 5

カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流れ保存則を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

左辺＝$(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

カットの性質（その1）

一般の場合の証明：下記の制約式を足し合わせる

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$

$- \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0 \qquad (k \in S - \{s\})$

$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が－1

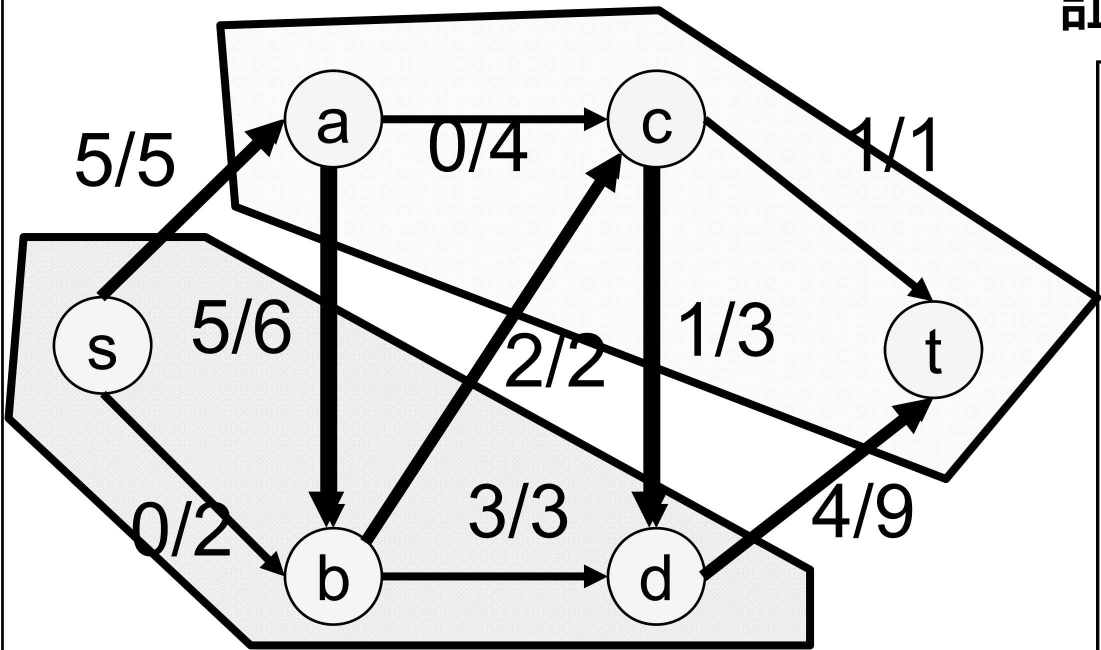
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

⇒ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

カットの性質（その2）

性質2：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)



f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明:

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ C(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ C(S, T) – 0
= C(S, T)

最小カット問題

性質2： 任意のカットとフローに対し
フローの流量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理
に対応

⇒ カットの容量は最大流の流量に
対する上界を与える

より良い上界を求めたい⇒最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）

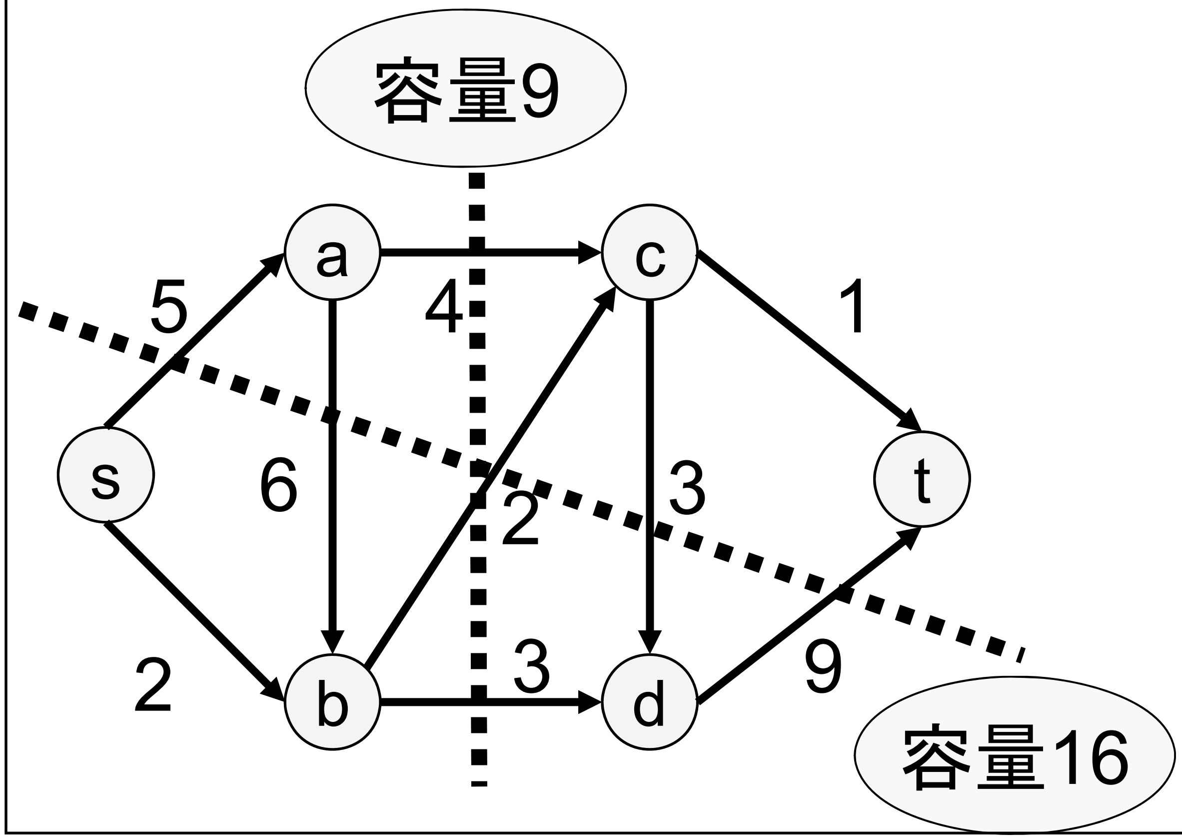
最小カット問題は最大流問題の双対問題

最小カット問題の例

最小カット問題

入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V

出力：容量最小のカット（最小カット）



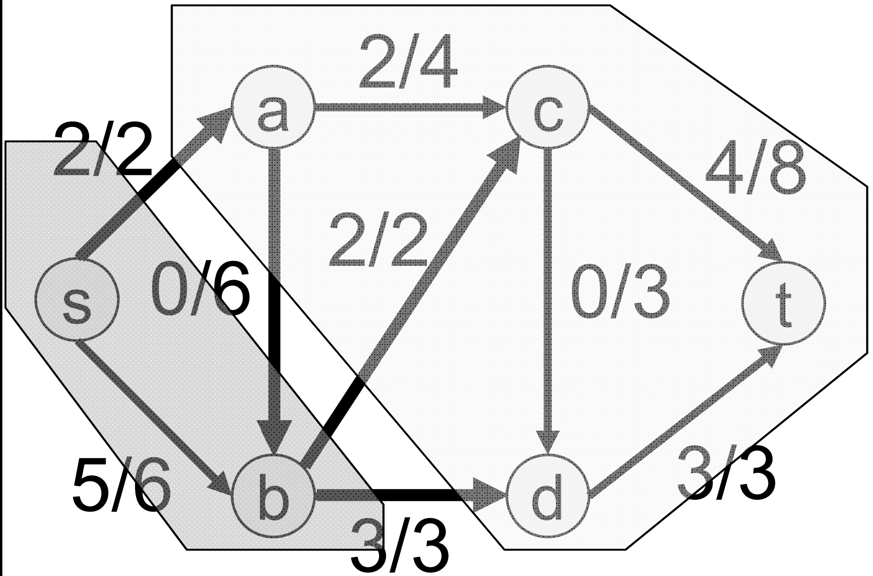
カットの性質（その3）

性質2より次が導かれる

性質3：任意のカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フローの流量 f ＝ カットの容量 C(S,T) が成り立つ

➔ 現在のフローは最大流，カットは最小カット

※フロー増加法の正当性の証明で使われる



f = 7,　C(S, T) = 7

➔ 現在のフローは最大流，
カットは最小カット

フロー増加法の正当性（その1）

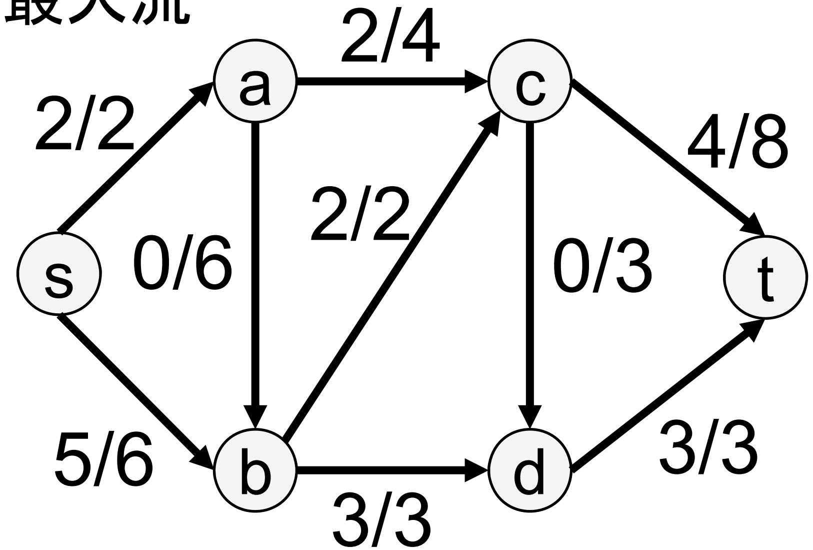
証明の方針

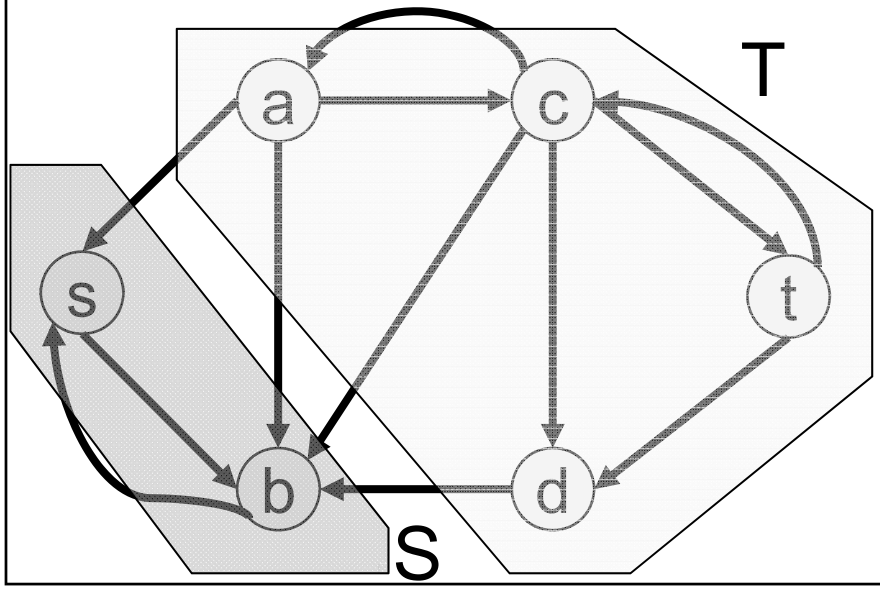
性質3：任意のカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フローの流量 f ＝ カットの容量 C(S,T) が成り立つ
➔ 現在のフローは最大流，カットは最小カット

フロー増加法の終了時のフローに対し，
f = C(S,T) を満たすカット(S,T)が得られることを示す

最大流最小カット定理の証明(その2)

最大流



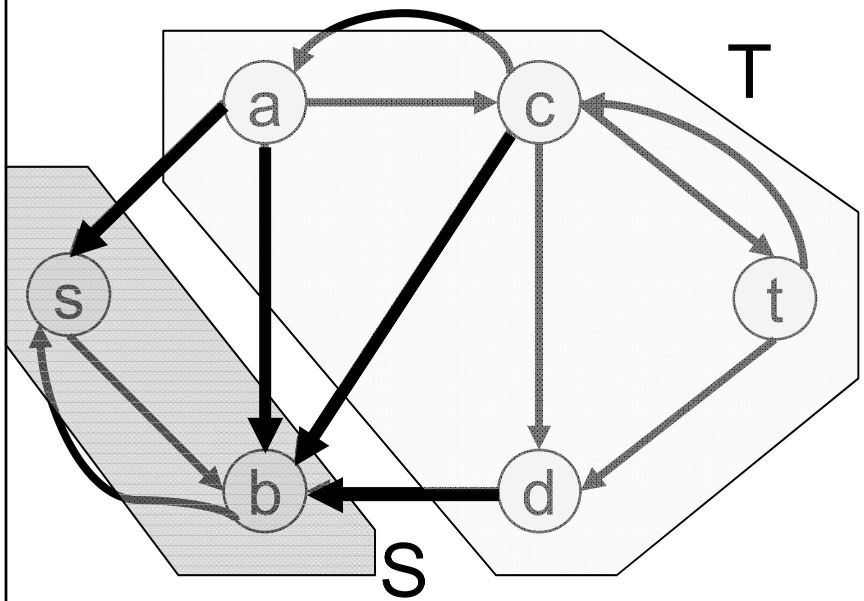


最大流に対して
残余ネットワークを作る

残余ネットワークには
増加路が存在しない

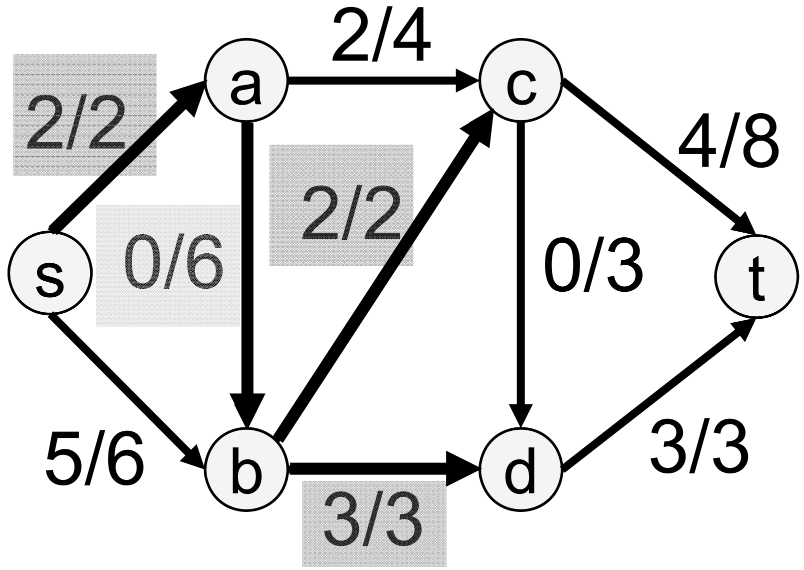
S = 残余ネットワークにおいて
　　s から到達可能な頂点集合
T = V – S
に対し、(S, T) はカット

最大流最小カット定理の証明(その3)



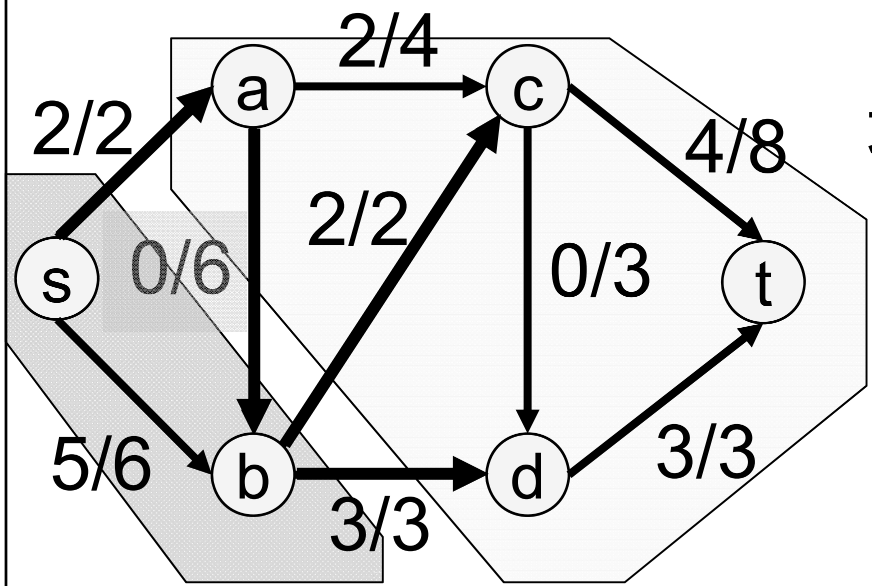
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大流最小カット定理の証明（その4）



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$
$\quad = \sum\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\} = C(S, T)$
$x(T, S) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$
$\therefore \ x(S, T) - x(T, S) = C(S, T)$

性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore \ f = C(S, T)$ （証明終わり）

最大流最小カット定理

いま証明したことをまとめると，次の通り

定理：フロー増加法により求められたフローは最大流
S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
T = V – S
とすると、(S, T) は最小s-t カット
さらに　f = U(S,T)　が成り立つ

この性質より，次の最大流最小カット定理が得られる

最大流最小カット定理：

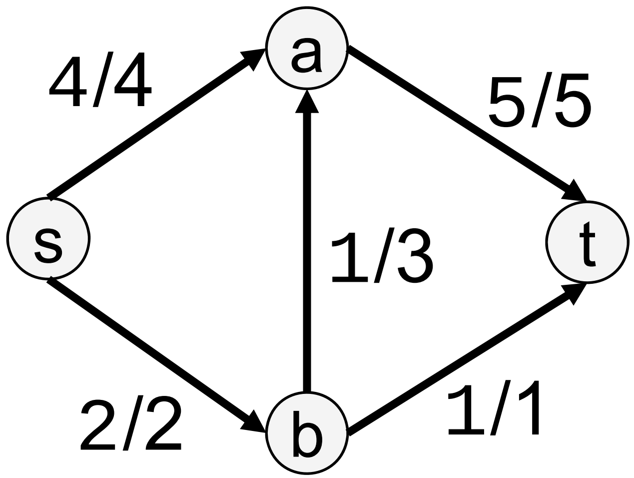
最大流 (x_{ij} | (i,j) ∈ E) と最小s-tカット(S,T)に対し

$$f = U(S,T)$$

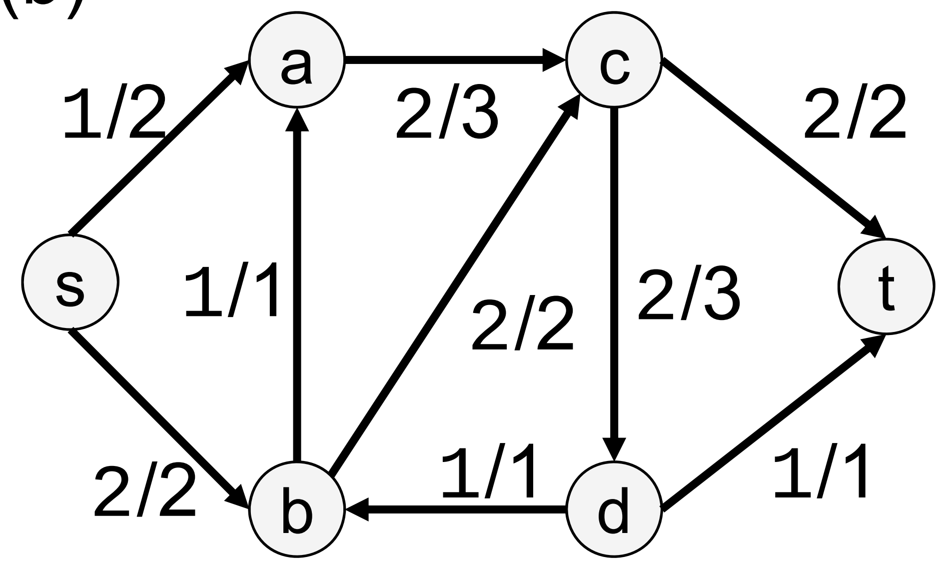
レポート問題

問１：下記の図は，最大流問題およびその最大流を表す．これらのフローに対し，残余ネットワークを書きなさい．
また，授業でやったやり方に従って最小カットを求めよ

(a)

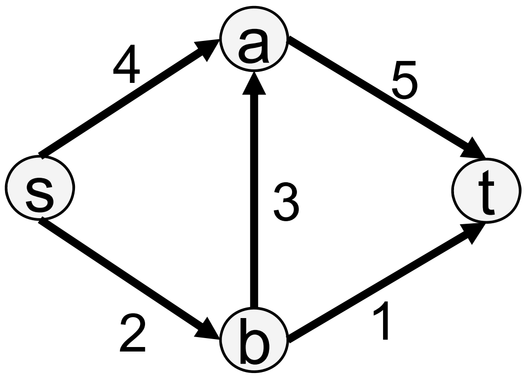


(b)



レポート問題

問２： 次のネットワークにおいて，S={s, a}, T={b, t}としたときに，x(S, T) – x(T, S) = f が成り立つことを，下記の定式化を使って証明しなさい．



最大化　f

条件　$x_{sa} + x_{sb} = f$

$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$

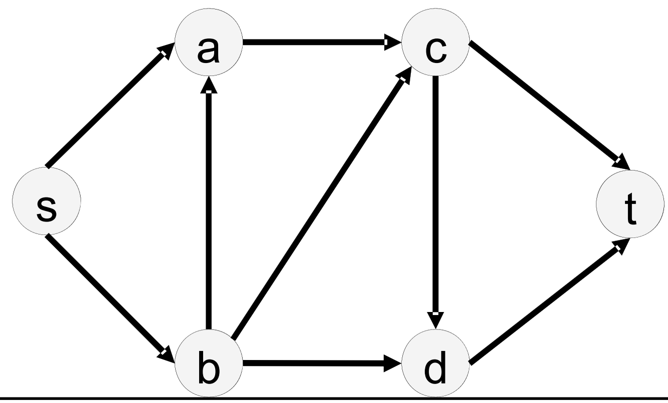
$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$

$-x_{at} - x_{bt} = -f$

$0 \leq x_{sa} \leq 4,\ 0 \leq x_{sb} \leq 2,\ 0 \leq x_{ba} \leq 3,$

$0 \leq x_{at} \leq 5,\ 0 \leq x_{bt} \leq 1$

問３： 右のネットワークにおいて，最小カットが({s,b,d}, {t,a,c}) となるような各枝の容量を求めなさい．（全部の枝の容量が0というのは不可）



応用:プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

（2000年頃のデータ）

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

エクスポスの優勝可能性

✕ 残り全勝しても80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィリーズ	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの優勝可能性	×

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83 83	71		1	6	1
フィリーズ	80 81	79	1		0	2
メッツ	78 84	78	6	0		0
ナショナルズ	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で下位チームが上位チームに勝った場合

○

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝の可能性はゼロではない

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

では，次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所属のチームとの試合

	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	レイズ	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
レイズ	49	86	3	4	0	0		20

レイズは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上➔優勝の可能性？

最大流問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

レイズにとって都合の良いケースのみ考える
●レイズは残り全勝
●東地区の他チームは他地区との試合において全敗

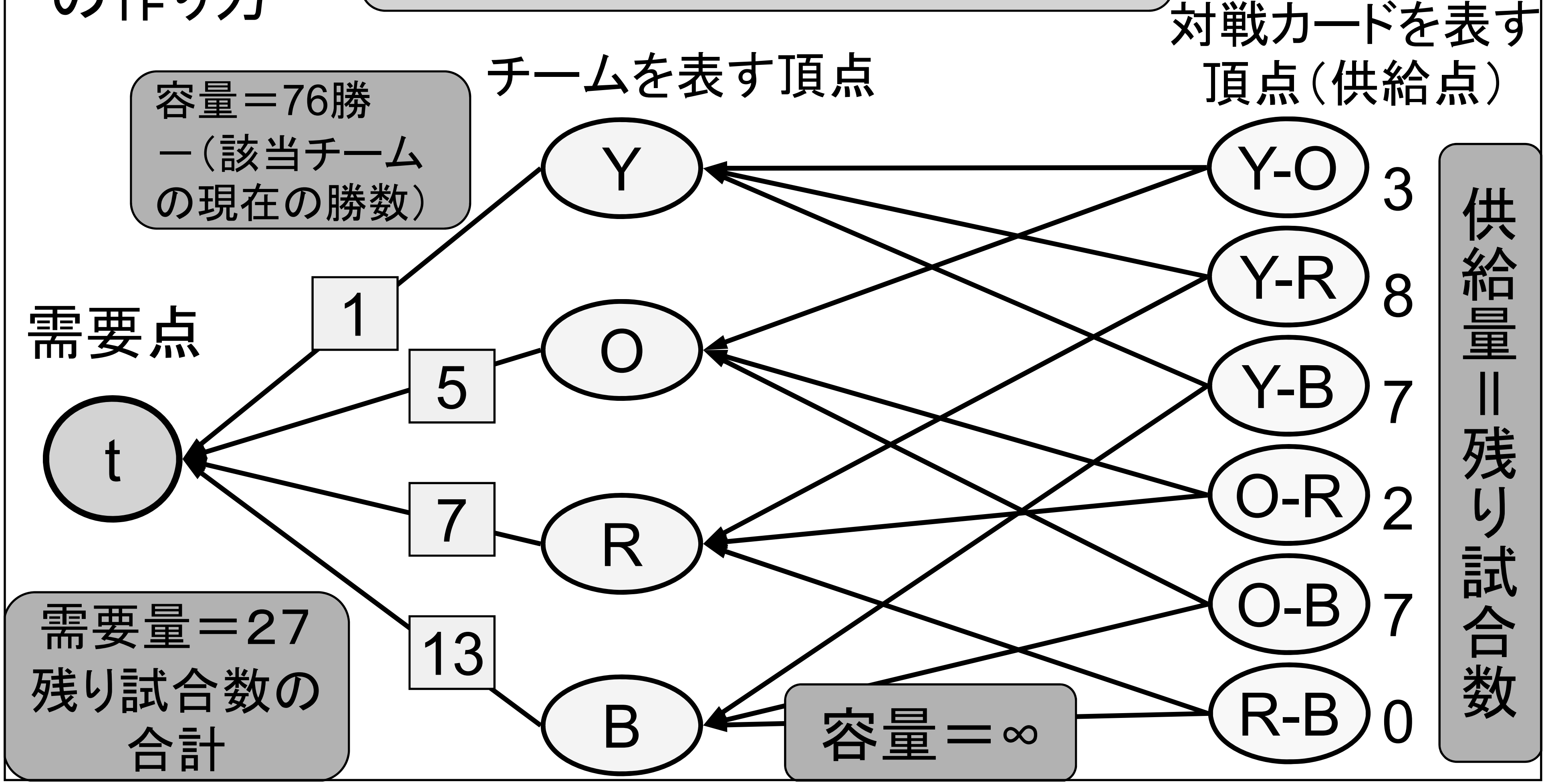
東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い
■どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
➔優勝の可能性なし　需要供給を満たすフローが存在しない
■あるケースにおいては，他チームは全て76勝以下
➔優勝の可能性あり　需要供給を満たすフローが存在する

需要供給を満たすフローを求める問題に帰着

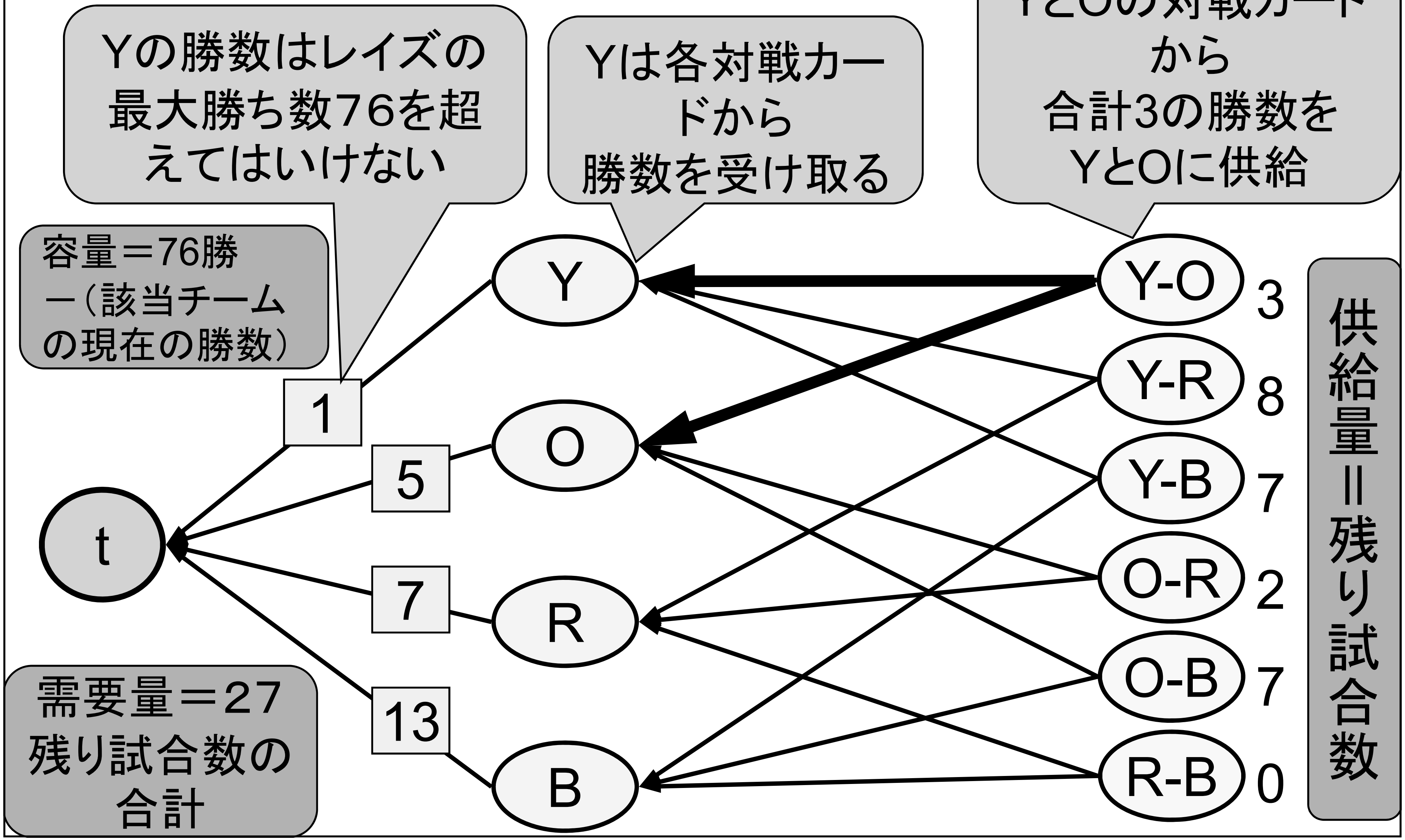
プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題

ネットワークの作り方

需要供給を満たすフローが存在
⇔優勝可能性が存在



プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大流問題



演習問題(レポート提出の必要なし)

問題：ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ