数理計画法 第4回

塩浦昭義

情報科学研究科 准教授

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

今後の予定

- 11月3日(木):文化の日(祝日)で授業無し
- 11月10日(木):研究室見学会のため授業無し
- 11月17日(木):授業第5回目

- 12月中に中間試験を予定

前回の復習

シンプレックス法

　ピボット演算に伴う問題の書き換え方

実行可能基底解の改善方法(その1)

- 現在の実行可能基底解が最適でない
  ➔より良い実行可能基底解を求めたい

目的関数: $-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12$
$x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 = 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2
基底解 (0,0,12,8)

① 基底解の基底変数を使って,線形計画問題を書き換える

目的関数: $0 - x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件: $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

② 目的関数のx_1, x_2の係数をチェック➔x_1の係数は負
➔基底解は最適でない
しかし,x_1 を増やすと
目的関数値を減少できる!

実行可能基底解の改善方法（その2）

目的関数：$0 - x_1 - x_2 \quad \to$ 最小化
制約条件：$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_1 を増やすと
目的関数値を減少できる！
元の値0から
どの程度まで増やせるか？

- ２つの制約条件を考慮：x_3, x_4 の非負性を保つ

$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$

➔x_3 の非負性を保つためには，x_1 は最大12/3=4まで増やせる

$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$

➔x_4 の非負性を保つためには，x_1 は最大8/1=8まで増やせる

∴ x_1 は最大max{4,8}=4まで増やせる

実行可能基底解の改善方法（その3）

➔目的関数は4減少，x_1 は4に，x_3 は0になる

➔新たに x_3 を非基底変数に，x_1 を基底変数にするピボット操作を行う

➔基底変数，非基底変数の組合せが変わった

2回目の反復

①新たな基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換える

$$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2$$

この式を他の式に代入

目的関数：$-4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 \geq 0$

$$x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_2 \geq 0$$

実行可能基底解の改善方法(その4)

3回目の反復

①新たな基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換える

$$x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

この式を他の式に代入

目的関数: $-5 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件: $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0$

$x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \geq 0$

$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

② 目的関数のx_3, x_4の係数をチェック➔全て非負

➔基底解は最適(終了)

非有界性の判定

- 線形計画問題は非有界

　➔目的関数値を任意に小さくできる(最小化の場合)

与えられた問題の非有界性は，基底解の改善の際に判定できる

例：

目的関数：$0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow$ 最小化

制約条件：$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0$

$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3 \geq 0$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

② 目的関数の係数をチェック

➔x_1の係数は負

➔基底解は最適でない

x_1 を増やすと目的関数値を減少できる！

x_1を任意に増加させても，基底変数x_4, x_5, x_6は非負のまま

➔x_1 は無限大に増加可能➔目的関数は無限に小さくできる(非有界)

シンプレックス法のまとめ

- 入力：標準形の線形計画問題
- 出力：最適解があれば最適解を出力，非有界の時はそれを判定

ステップ0：初期の実行可能基底解を求め，それに合わせて問題を書き換え

初期の実行可能基底解はどうやって求める？

ステップ1：最適性判定

目的関数の非基底変数の係数が全て非負

➔現在の基底解は最適解

ある非基底変数x_sの係数が負➔増加させる

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数x_sをどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外➔x_sを最大限増やしたときに0に減少する

基底変数x_tを非基底変数に変更，x_sを基底変数に変更

新しい基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換え，ステップ1へ

今日の内容

線形計画問題（2章）

２．５　2段階シンプレックス法

２．６　双対性

２．５　2段階シンプレックス法

初期の実行可能基底解の求め方

- 初期の実行可能基底解はどうやってもとめる？
  - 簡単な場合：元の制約が「左辺≦正の数」の形

制約条件： $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$

スラック変数を
追加して等式にする

制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

スラック変数を基底変数に
元々の変数を非基底変数にする

制約条件： $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
$x_4 = 8 - x_1 + 2x_2$

実行可能基底解が
得られる

二段階シンプレックス法

- 一般に初期実行可能基底解を求めることは簡単ではない
- そもそも，与えられた問題が実行可能解をもつか否か，わからない
- 二段階シンプレックス法の利用：シンプレックス法を２回使う
  - １段階目：初期実行可能基底解を求める
    （実行可能解が存在するか否かを判定）
  - ２段階目：最適解を求める
    （非有界な場合はそれを判定）

初期実行可能基底解を求める

$$\begin{aligned}
&\text{目的関数：} -2x_1 - x_2 - x_3 \\
&\text{制約条件：} -x_1 - 2x_2 \qquad\qquad = -12 \\
&\qquad\qquad\quad\; x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20
\end{aligned}$$

- この問題に実行可能解が存在するか調べたい
- 存在する場合には，実行可能基底解を求めたい

    ➔ 人工的な線形計画問題を作り，シンプレックス法を適用

- 制約条件に新たな非負変数（人工変数）を追加

$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_4 \qquad &= -12 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 20
\end{aligned}$$

右辺が正➔左辺に新たな変数を加える
右辺が負➔左辺から新たな変数を引く
右辺が0➔何もしない

人工問題の性質(その1)

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_4 \qquad\quad &= -12 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad + x_5 &= 20
\end{aligned}
$$

人工変数の追加方法より,
次の性質が得られる

- 新たな制約条件を(非負条件も)満たす解は簡単に得られる
  - 人工変数を右辺の値の絶対値に設定, 元の変数は0
  - 上の例: 人工変数x_4, x_5, 元の変数x_1, x_2, x_3,
    得られる解(0,0,0,12,20)

人工問題の性質(その2)

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 \quad\quad &= -12 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad\quad + x_5 &= 20
\end{aligned}
$$

人工変数の追加方法より，
次の性質が得られる

人工変数が全て0の実行可能解が存在
⇔元の問題の実行可能解が存在

- 人工変数が全て0の実行可能解から，元の問題の実行可能解が簡単に得られる
- 元の問題の実行可能解から，人工変数が全て0の実行可能解が簡単に得られる
- 上の例：人工問題の解(12,0,4,0,0) ⇔ 元の問題の解(12,0,4)

- 人工変数が全て0の実行可能解が存在しない場合，
  元の問題は実行可能解をもたないことがわかる
- 人工変数の和を最小化する線形計画問題を考えればよい

第1段階で解く人工問題

- 人工変数の和を最小化する線形計画問題を第1段階で解く

目的関数：$x_4 + x_5$→最小化
制約条件：
$$-x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_4 \qquad = -12$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_5 = 20$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

人工変数は全て非負➔最適値は必ず非負
- 「最適値＝0」の場合

➔人工変数は全て0➔元の問題の実行可能解が存在
- 「最適値＞0」の場合

➔人工変数は全て0にすることは不可能
➔元の問題の実行可能解は存在しない

初期実行可能基底解の求め方（その1）

- 人工変数の和を最小化する線形計画問題をシンプレックス法で解いて得られる最適基底解
  - 「最適値＝0」の場合，人工変数は全て0

    ➔（退化した基底解でなければ）人工変数は全て非基底変数

    ➔人工変数を削除すると，元の問題の実行可能基底解になる

目的関数：$x_4 + x_5$→最小化

制約条件：

$$x_1 = 4 + 2x_3 - 2x_4 + x_5$$

$$x_2 = 4 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

目的関数：$x_4 + x_5$→最小化

制約条件：

$$x_1 = 4 + 2x_3 - 2x_4 + x_5$$

$$x_2 = 4 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

人工問題の
最適基底解
(4,4,0,0,0)

人工変数を削除
人工問題の目的
関数も削除

元の問題の
初期実行可能基底解
(4,4,0)

初期実行可能基底解の求め方(その2)

- 人工変数が基底変数になっていた場合

  ➔人工変数の値は0

  ➔非基底変数の中の元の変数をうまく選んで入れ替える

  ➔人工変数を非基底変数にすることが可能

目的関数: $x_3 + x_4 + 2x_2$
制約条件:
$$x_1 = 4 - 2x_3 - 2x_4 + x_2$$
$$x_5 = 0 + x_3 \qquad + 2x_2$$

➡

目的関数: $x_5 + x_4$
制約条件:
$$x_1 = 4 - 2x_5 - 2x_4 + 5x_2$$
$$x_3 = 0 + x_5 \qquad - 2x_2$$

人工変数x_4, x_5
x_5は基底変数
値は0

x_5 の式の右辺で,
係数が非ゼロの
元の変数(x_2, x_3)を
1つ選び,入れ替え

人工変数x_4, x_5
は全て非基底変数
になった

2段階シンプレックス法の流れ

- シンプレックス法を2回使用，実行可能解の有無も判定

1段階目 : 実行可能解の判定

- 人工問題を作成
  →シンプレックス法を適用，
  元の問題の実行可能解の有無を調べる
  実行可能解をもたない⇒終了
  実行可能解をもつ⇒実行可能基底解を出力、2段階目へ

2段階目 : 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた実行可能基底解を使って，
  シンプレックス法を実行

２．６　双対性

最適値の見積もりの計算(その1)

- 標準形の線形計画問題
  - 最適値を下から見積もりたい(最適値の下界値の計算)

目的関数: $-2x_1 - x_2 - x_3$ →最小化
制約条件: $-x_1 - 2x_2 = -12$ ①
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$ ②
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

制約を定数倍して
足し合わせる

最適値の下界値

①+②×(-1): $-2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -32$
変数は全て非負なので,(目的関数)$-2x_1 - x_2 - x_3$
$\geq -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -32$
①×(3/2)+②×(-1/2): (目的関数≧)$-2x_1 - 5x_2 - x_3 = -28$

より良い下界を
上手に求める方法は?

最適値のより良い
下界値

最適値の見積もりの計算(その2)

- 標準形の線形計画問題
  - 最適値を下から見積もりたい(最適値の下界値の計算)

目的関数: $-2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow$最小化
制約条件: $-x_1 - 2x_2 = -12$ ①
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$ ②
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

各制約に**変数**を
掛けて足し合わせる

①$\times y_1$+②$\times y_2$:

$$(-y_1 + y_2)x_1 + (-2y_1 + 4y_2)x_2 + (2y_2)x_3 = \boxed{-12y_1 + 20y_2}$$

これが下界値になるための条件

x_1の係数に関する条件: $-y_1 + y_2 \leq -2$
x_2の係数に関する条件: $-2y_1 + 4y_2 \leq -1$
x_3の係数に関する条件: $2y_2 \leq -1$

これが下界値
出来るだけ
大きくしたい

最適値の見積もりの計算（その3）

- 標準形の線形計画問題
  - 最適値を下から見積もりたい（最適値の下界値の計算）
  - 一番良い（大きい）下界値を求める問題は次のように定式化される

目的関数：$-12y_1 + 20y_2$→最大化
制約条件：$-y_1 + y_2 \leq -2$
$-2y_1 + 4y_2 \leq -1$
$2y_2 \leq -1$
（変数の非負条件は無し）

主問題の各変数と
双対問題の各制約条件は
1対1対応

主問題の各制約条件と
双対問題の各変数は
1対1対応

これは線形計画問題
元の問題の双対問題と呼ばれる
元の問題は主問題と呼ばれる

標準形の双対問題

- 標準形の線形計画問題（主問題）

目的関数： $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \to$ 最小化

制約条件：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 && \leftrightarrow y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 && \leftrightarrow y_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m && \leftrightarrow y_m
\end{aligned}
$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

主問題の各制約条件と
双対問題の各変数は
1対1対応

- その双対問題

目的関数： $b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \quad \to$ 最大化

制約条件：

$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1} &\leq c_1 && \leftrightarrow x_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2} &\leq c_2 && \leftrightarrow x_2 \\
&\vdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn} &\leq c_n && \leftrightarrow x_n
\end{aligned}
$$

（変数の非負制約は無し）

主問題の各変数と
双対問題の各制約条件は
1対1対応

弱双対定理とその系（その1）

双対問題の定義より，次の重要な性質が導ける

弱双対定理：主問題と双対問題のそれぞれの任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ および $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対して
$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$ が成立

弱双対定理から，次の性質が導ける

系1：主問題の任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して，
$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq$ 双対問題の最大値 が成立．
双対問題の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対して
$\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \leq$ 主問題の最小値 が成立

弱双対定理とその系(その2)

弱双対定理から，次の性質が導ける

系2：主問題と双対問題のそれぞれの任意の実行可能解 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$および$(y_1, y_2, \dots, y_m)$が
$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$を満たす
➔ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$および$(y_1, y_2, \dots, y_m)$は
主問題と双対問題の最適解

系3：主問題が非有界ならば，双対問題は実行可能解をもたない
双対問題が非有界ならば，主問題は実行可能解をもたない

主問題と双対問題の関係

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順（1）双対問題を標準形に書き換え

（2）書き換えた問題の双対問題をつくる

（3）得られた双対問題を書き換えて，

元の問題（主問題）に一致することを確かめる．

レポート問題（〆切：次回授業13:05まで）

問1：次の問題を2段階シンプレックス法で解け．途中の計算過程も書くこと

(a) 目的関数：$-3x_1 - 2x_2 \to$ 最小化
制約条件：$2x_1 - x_2 - x_3 = -1$
$-x_1 + 2x_2 - x_4 = 4$
$-x_1 - x_2 - x_5 = -2$
$x_1, \ldots, x_5 \geqq 0$

(b) 目的関数：$-3x_1 - 2x_2 \to$ 最小化
制約条件：$2x_1 - x_2 - x_3 = -1$
$-x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$
$x_1 + x_2 - x_5 = 2$
$x_1, \ldots, x_5 \geqq 0$

問2：左の問題(a)の双対問題を書きなさい．

問3：双対問題の双対問題が主問題に一致することを証明せよ．

問4：弱双対定理の系3を証明せよ．