数理計画法 第3回

塩浦昭義
情報科学研究科 准教授

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

今日の内容

線形計画問題（2章）

- 基底解と最適解（２．２節）の続き
- シンプレックス法の動き
  - ピボット操作に伴う問題の書き換え

ピボット操作

ピボット操作：基底変数と非基底変数を1個ずつ入れ替えること
ピボット操作により，実行可能基底解を隣接する実行可能基底解に変化させることが可能

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)

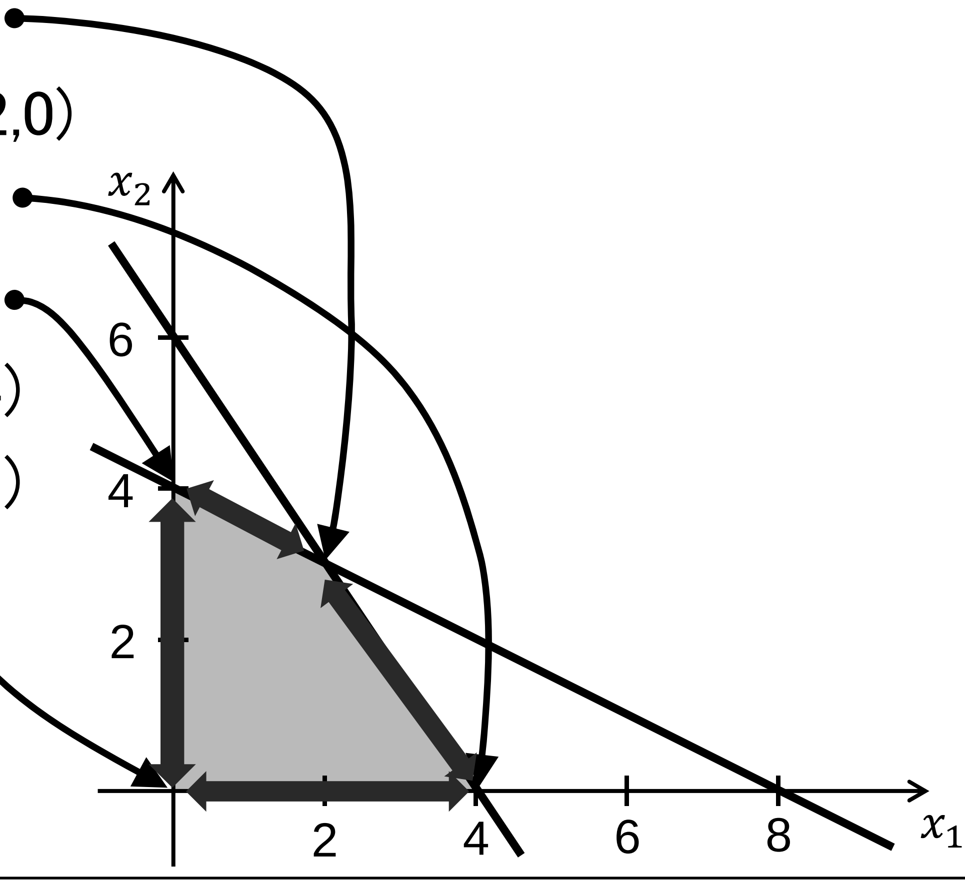
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)

基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)

基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)

基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)

基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



基底解の最適性の判定：例

目的関数： $-x_1 - x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 12$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4

基底解 (2,3,0,0)

① 基底解の基底変数を使って，線形計画問題を書き換える

目的関数： $-5 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件： $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

② 目的関数の x_3, x_4 の係数をチェック

全て非負➔現在の基底解は最適解

基底解の最適性の判定(その1)

実行可能基底解の中には必ず最適解が存在

では，どうやって最適性を判定する？➔基底変数を消去するとわかる！

例：実行可能基底解の基底変数が$x_1, x_2, \dots, x_m$の場合

目的関数：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

等式制約を変形して以下の形にする

基底変数を左辺に，非基底変数を右辺におく

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1' - a_{m+1,1}'x_{m+1} - a_{m+2,1}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,1}'x_n \\
x_2 &= b_2' - a_{m+1,2}'x_{m+1} - a_{m+2,2}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,2}'x_n \\
&\vdots \\
x_m &= b_m' - a_{m+1,m}'x_{m+1} - a_{m+2,m}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,m}'x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数を0にする

➔基底変数の値が

$x_i = b_i'$ に決まる

この基底解は実行可能なので，$b_i' \geq 0$成立

基底解の最適性の判定（その2）

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \\
x_2 &= b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \\
&\vdots \\
x_m &= b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n
\end{aligned}
$$

⇦ 元の線形計画問題に代入して，基底変数を消去

基底変数を消去した問題

目的関数：$d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \to$ 最小化

（d は定数）

制約条件：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0 \\
x_2 &= b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0 \\
&\vdots \\
x_m &= b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0 \\
&x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

基底解の最適性の判定（その3）

基底変数を消去した問題

目的関数：$d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \rightarrow$ 最小化

（d は定数）

制約条件：
$$x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0$$
$$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0$$
$$\vdots$$
$$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0$$
$$x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n \geq 0$と仮定

➔目的関数は $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$のとき最小

つまり，現在の基底解のときに最小➔現在の基底解は最適解

基底解の最適性の判定（その4）

基底解の最適性の判定方法のまとめ：

① 基底解の基底変数を使って，線形計画問題を次の形に書き換える

基底変数を消去した問題

目的関数： $d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \to$ 最小化

（d は定数）

制約条件： $x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0$

$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0$

$\vdots$

$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0$

$x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

② $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n \geq 0$が成り立つか否かチェック

全て非負➔現在の基底解は最適解

２．３　 シンプレックス法

実行可能基底解の改善方法（その1）

- 現在の実行可能基底解が最適でない
  ➔より良い実行可能基底解を求めたい

目的関数： $-x_1 - x_2 \quad \to$ 最小化
制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12$
$x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 = 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2
基底解 (0,0,12,8)

① 基底解の基底変数を使って，線形計画問題を書き換える

目的関数： $0 - x_1 - x_2 \quad \to$ 最小化
制約条件： $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

② 目的関数のx_1, x_2の係数を
チェック➔x_1の係数は負
➔基底解は最適でない
しかし，x_1 を増やすと
目的関数値を減少できる！

実行可能基底解の改善方法(その2)

目的関数: $0 - x_1 - x_2 \quad \to$ 最小化
制約条件: $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_1 を増やすと
目的関数値を減少できる!
元の値0から
どの程度まで増やせるか?

- 2つの制約条件を考慮:x_3, x_4 の非負性を保つ

$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$

➔x_3 の非負性を保つためには, x_1 は最大12/3=4まで増やせる

$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$

➔x_4 の非負性を保つためには, x_1 は最大8/1=8まで増やせる

∴ x_1 は最大max{4,8}=4まで増やせる

実行可能基底解の改善方法(その3)

➔目的関数は4減少，x_1 は4に，x_3 は0になる

➔新たに x_3 を非基底変数に，x_1を基底変数にするピボット操作を行う

➔基底変数，非基底変数の組合せが変わった

2回目の反復

①新たな基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換える

$$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2$$

この式を他の式に代入

目的関数: $-4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件: $x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 \geq 0$

$x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0, x_2 \geq 0$

② 目的関数のx_3, x_2の係数をチェック➔x_2の係数は負

➔基底解は最適でない

しかし，x_2 を増やすと目的関数値を減少できる！

実行可能基底解の改善方法（その4）

目的関数: $-4+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_2 \;\rightarrow$ 最小化

制約条件: $x_1=4-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_2 \geq 0$

$x_4=4+\frac{1}{3}x_3-\frac{4}{3}x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_2 を増やすと
目的関数値を減少できる！
元の値0から
どの程度まで増やせるか？

- 2つの制約条件を考慮: x_1, x_4 の非負性を保つ

$x_1=4-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_2 \geq 0$

➔x_1の非負性を保つためには，x_2は最大4/(2/3)=6まで増やせる

$x_4=4+\frac{1}{3}x_3-\frac{4}{3}x_2 \geq 0$

➔x_4の非負性を保つためには，x_2は最大4/(4/3)=3まで増やせる

∴ x_2 は最大max{6,3}=3まで増やせる

実行可能基底解の改善方法(その5)

➔目的関数は1減少，x_2 は3に，x_4 は0になる
➔新たに x_4 を非基底変数に，x_2を基底変数にするピボット操作を行う
➔基底変数，非基底変数の組合せが変わった

3回目の反復

①新たな基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換える

$$x_4 = 4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2 \Longrightarrow x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

この式を他の式に代入

目的関数: $-5 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件: $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0$

$x_2 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \geq 0$

$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

② 目的関数のx_3, x_4の係数をチェック➔全て非負

➔基底解は最適(終了)

非有界性の判定

- 線形計画問題は非有界

  ⇔目的関数値を任意に小さくできる（最小化の場合）

与えられた問題の非有界性は，基底解の改善の際に判定できる

例：

目的関数：$0-2x_1-x_2-x_3 \rightarrow$ 最小化

制約条件：$x_4 = 4+2x_1-2x_2+x_3 \geq 0$

$x_5 = 4+2x_1 \qquad -4x_3 \geq 0$

$x_6 = 1+4x_1-3x_2+x_3 \geq 0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

② 目的関数の係数をチェック

➔x_1の係数は負

➔基底解は最適でない

x_1 を増やすと目的関数値を減少できる！

x_1を任意に増加させても，基底変数x_4, x_5, x_6は非負のまま

➔x_1 は無限大に増加可能➔目的関数は無限に小さくできる（非有界）

ピボット操作に関する注意

- ピボット操作において,
  - 非基底変数から基底変数に変える変数の候補が複数の場合がある

    （目的関数の負の係数が複数の場合）

    目的関数: $-x_1 - x_2$
    制約条件: $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
    $x_4 = 4 - x_1 - 2x_2$

  - 基底変数から非基底変数に変える変数の候補が複数の場合がある

    （非基底変数を増やすことにより,
    複数の基底変数が0になる場合）

    制約条件: $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
    $x_4 = 4 - x_1 - 2x_2$
    x_1を4増やすとx_3, x_4共に0になる

退化した基底解の扱い(その1)

- 基底解が退化している場合，ピボット操作を行っても基底解が変化しないことがある

例

目的「最小化」は省略
非負条件は省略

目的関数：$-x_1 - x_2$
制約条件：$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
$x_4 = 4 - x_1 - 2x_2$

基底解(0,0,12,4)
x_1の係数が負
➔x_1は4増加できる(基底変数にする)
x_3, x_4 共に0になる
➔ x_3 を非基底にする

⇩

目的関数：$-4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2$
制約条件：$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2$
$x_4 = 0 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_2$

基底解(4,0,0,0)
x_2の係数が負
➔x_2は0増加できる(基底変数にする)

変化がなくても，0だけ増加したと見なす

x_4が0になる
➔ x_4 を非基底にする

変化がなくても，0だけ減少したと見なす

⇩

退化した基底解の扱い（その2）

目的関数: $-4+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4$
制約条件: $x_1=4-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$
$x_2=0+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4$

基底解(4,0,0,0)
（基底解は不変，ただし基底変数，
非基底変数の組は変化した）
目的関数の係数がすべて非負
➔現在の基底解は最適

- 退化した基底解の場合，ピボット操作で入れ替える変数の
  選び方によっては，無限ループに陥ることもある（循環）
- ピボット操作で入れ替える変数をうまく選ぶと，循環を回避できる

例：最小添え字規則：
- 新たに基底変数（非基底変数）に変える変数の候補が複数ある
  ➔添え字最小の変数を選ぶ

シンプレックス法のまとめ

- 入力：標準形の線形計画問題
- 出力：最適解があれば最適解を出力，非有界の時はそれを判定

ステップ0：初期の実行可能基底解を求め，それに合わせて問題を書き換え

ステップ1：最適性判定

目的関数の非基底変数の係数が全て非負

➔現在の基底解は最適解

ある非基底変数x_sの係数が負➔増加させる

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数x_sをどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外➔x_sを最大限増やしたときに0に減少する

基底変数x_tを非基底変数に変更，x_sを基底変数に変更

新しい基底変数，非基底変数に合わせて問題を書き換え，ステップ1へ

初期の実行可能基底解はどうやって求める？

初期の実行可能基底解の求め方

- 初期の実行可能基底解はどうやってもとめる？
  - 簡単な場合：元の制約が「左辺≦正の数」の形

制約条件： $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 \quad + 2x_2 \leq 8$

スラック変数を
追加して等式にする

制約条件： $3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12$
$x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 = 8$

スラック変数を基底変数に
元々の変数を非基底変数にする

制約条件： $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
$x_4 = 8 - x_1 \quad + 2x_2$

実行可能基底解が
得られる

二段階シンプレックス法

- 一般に初期実行可能基底解を求めることは簡単ではない
- そもそも，与えられた問題が実行可能解をもつか否か，わからない
- 二段階シンプレックス法の利用：シンプレックス法を2回使う
  - 1段階目：初期実行可能基底解を求める
    （実行可能解が存在するか否かを判定）
  - 2段階目：最適解を求める
    （非有界な場合はそれを判定）

初期実行可能基底解を求める

目的関数：$-2x_1 - x_2 - x_3$
制約条件：$-x_1 - 2x_2 = -12$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$

- この問題に実行可能解が存在するか調べたい
- 存在する場合には，実行可能基底解を求めたい

  ➔ 人工的な線形計画問題を作り，シンプレックス法を適用

- 制約条件に新たな非負変数（人工変数）を追加

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 \qquad\quad - x_4 \qquad &= -12 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 20
\end{aligned}
$$

右辺が正➔左辺に新たな変数を加える
右辺が負➔左辺から新たな変数を引く
右辺が0➔何もしない

人工問題の性質

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_4 \qquad &= -12 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad + x_5 &= 20
\end{aligned}
$$

人工変数の追加方法より，次の性質が得られる

- 新たな制約条件を（非負条件も）満たす解は簡単に得られる
  - 人工変数を右辺の値の絶対値に設定，元の変数は0
  - 上の例：人工変数x_4, x_5，元の変数x_1, x_2, x_3，
    得られる解(0,0,0,12,20)
- 人工変数が全て0の実行可能解が存在
  ➔元の問題の実行可能解が簡単に得られる
  とくに，元の問題が実行可能解をもつことがわかる
  - 上の例： 人工問題の解(12,0,4,0,0) ➔ 元の問題の解(12,0,4)
- 人工変数の和を最小化する線形計画問題を考えればよい

レポート問題(〆切:次回授業13:05まで)

問1:右の問題をシンプレックス法で解け. 初期の基底変数はx_3, x_4とする.
ただし, 最初に基底変数に変える非基底変数はx_2とする.

目的関数: $-x_1 - x_2$
制約条件: $x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$
$x_4 = 4 - x_1 - 2x_2$

また, 途中の計算過程も詳しく書くこと.

問2:上記の問題において, 初期の実行可能基底解から最適基底解まで, どのように基底解が変化するか, 図示して説明せよ.

問3:右の問題をシンプレックス法で解け.
初期の基底変数はx_4, x_5, x_6とする.

目的関数: $0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$
制約条件: $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$
$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$
$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$