数理計画法 第2回

塩浦昭義

情報科学研究科 准教授

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

前回の復習

数理計画とは？

数理計画(復習)

- 数理計画問題とは？
  - 狭義には:数理(数学)を使って計画を立てるための問題
  - 広義には:与えられた評価尺度に関して
    最も良い解を求める問題(最適化問題)
- 数理計画で扱う，基本的なモデル
  - 線形計画問題(線形最適化問題)
  - ネットワーク計画問題(ネットワーク最適化問題)
  - 非線形計画問題(非線形最適化問題)
  - 組合せ計画問題(組合せ最適化問題)

数理計画問題の定義（復習）

- 数理計画問題は，下記のように表される問題
  - 目的関数：　$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ → 最小（または最大）
  - 制約条件：　$x \in S$
    - $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$は変数$x_1, \dots, x_n$に関する関数（目的関数）
    - S はベクトル$(x_1, x_2, \dots, x_n)$の集合（実行可能集合）
    - S の要素は実行可能解
    - 目的関数を最小（または最大）にする実行可能解は最適解

- 目的：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow$ 最大化　➔ $f(x_1, x_2, x_3) = 70x_1 + 120x_2 + 30x_3$
- 条件：

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 \qquad\quad + 6x_3 \le 80 \\ \qquad 2x_2 + 8x_3 \le 50 \\ 7x_1 \qquad\quad + 15x_3 \le 100 \\ 3x_1 + 11x_2 \qquad\quad \le 70 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{array}\right\}$$

➔ S =左の条件を全て満たす(x_1, x_2, x_3) 全体

線形計画問題の例:生産計画問題(復習)

- 目的:$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow$ 最大化
- 条件:

$$
\begin{aligned}
5x_1 \qquad\quad + 6x_3 &\leq 80 \\
2x_2 + 8x_3 &\leq 50 \\
7x_1 \qquad\quad + 15x_3 &\leq 100 \\
3x_1 + 11x_2 \qquad\quad &\leq 70 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

目的:
1次関数(線形関数)の最大化
条件:
1次(線形)の不等式(等号付き)

一般に,
目的が一次関数の最大化(最小化)
条件がいずれも一次の不等式(等号付き)または等式
➔線形計画問題

最大化(最小化される関数)は　目的関数
条件は　制約(制約条件)

今日の内容

線形計画問題（2章）

- 線形計画問題の標準形（2．1節）
- 基底解と最適解（2．2節）

線形計画問題の標準形

- 線形計画問題は様々な形に定式化される
  - 目的は最小化または最大化
  - 制約条件は不等式（≧または≦）または等式
  - 変数には非負条件があってもなくても良い
- 問題の表現が不統一では不便➔統一の形（**標準形**）を扱う

目的関数： $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \to$ 最小化

制約条件：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

標準形の性質

目的関数： $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件： $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$$
\begin{aligned}
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- 標準形の特徴
  - 目的は最小化
  - 制約条件はすべて等式
  - 各変数には非負条件がある
- 任意の線形計画問題は，標準形に書き換えることが可能
  - 目的が最大化の場合，最小化に書き換え可能
  - 制約条件が不等式の場合，等式に書き換え可能
  - 非負条件のない変数は，非負条件のある変数に置き換え可能

標準形への書き換え（その1）

目的関数：$-2x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow$ 最大化
制約条件：$4x_1 - 6x_2 = 30$
$2x_1 + 8x_2 \leq 50$
$7x_1 + 5x_2 \geq 10$
$x_1 \geq 0$, x_2は非負条件なし

この変更により，
- 実行可能集合は不変
- 最適解は不変

➔問題としては
実質的に同じ

(1)「最大化」を「最小化」に書き換え

- 目的関数に −1 を掛ければ良い

目的関数：$-2x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow$ 最大化

目的関数：$+2x_1 - 5x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

$(x_1, x_2) = (6, -1)$は
書き換え前も後も
実行可能解

標準形への書き換え(その2)

目的関数: $2x_1 - 5x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件: $4x_1 - 6x_2 = 30$
$2x_1 + 8x_2 \leq 50$
$7x_1 + 5x_2 \geq 10$
$x_1 \geq 0$, x_2は非負条件なし

この変更により，スラック変数を無視すれば，
- 実行可能集合は不変
- 最適解は不変

➔問題としては
実質的に同じ

(2)「不等式」を「等式」に書き換え

- 新しい非負変数(**スラック変数**)を追加すればよい

$$2x_1 + 8x_2 \leq 50$$
$$7x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$(x_1, x_2) = (6, -1)$は
書き換え前の実行可能解
➔$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, -1, 46, 27)$
は書き換え後の実行可能解

スラック変数

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 50, \quad x_3 \geq 0$$
$$7x_1 + 5x_2 - x_4 = 10, \quad x_4 \geq 0$$

スラック変数

標準形への書き換え（その3）

(3)「非負条件なしの変数」を「非負条件ありの変数」に書き換え

- 非負条件なしの変数 x

➔非負条件ありの2つの変数 x' と x'' の差 $x' - x''$に置き換える

- $x' - x''$ は任意の実数を表現できる
  - $x \geq 0$ のとき: $x' = x, x'' = 0$ とおくと, $x', x'' \geq 0$, $x' - x'' = x$
  - $x < 0$ のとき: $x' = 0, x'' = -x$ とおくと, $x', x'' \geq 0$, $x' - x'' = x$

標準形への書き換え(その4)

目的関数: $2x_1 - 5x_2 \quad \to$ 最小化
制約条件: $4x_1 - 6x_2 = 30$
$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 50$
$7x_1 + 5x_2 - x_4 = 10$
$x_1 \geq 0, x_2$は非負条件なし, $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

x_2を $x_2' - x_2''$
(ただし$x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$)
に置き換え

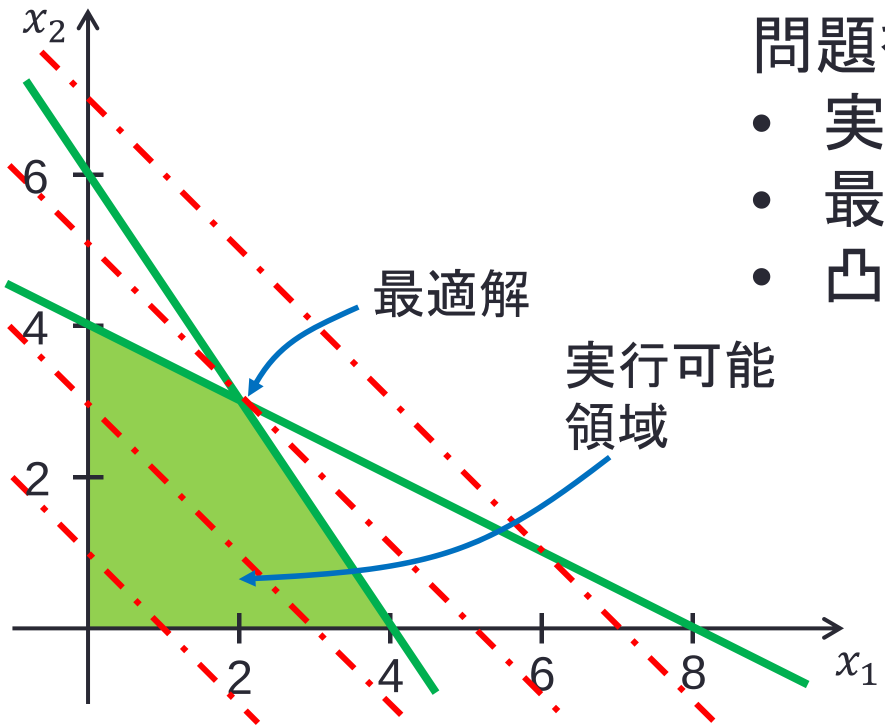
目的関数: $2x_1 - 5(x_2' - x_2'') \quad \to$ 最小化
制約条件: $4x_1 - 6(x_2' - x_2'') = 30$
$2x_1 + 8(x_2' - x_2'') + x_3 = 50$
$7x_1 + 5(x_2' - x_2'') - x_4 = 10$
$x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

2変数の線形計画問題（その1）

例題

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件：$3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

問題の性質を知るために，問題を図を使って表現する



問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解

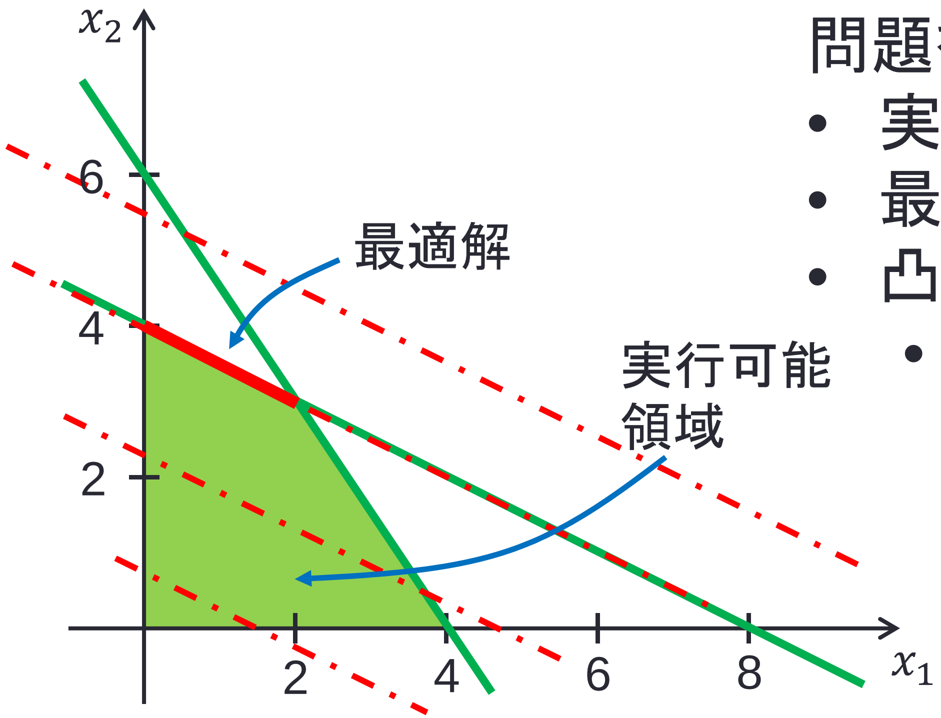
2変数の線形計画問題（その2）

例題

目的関数：$-x_1 - 2x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件：$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



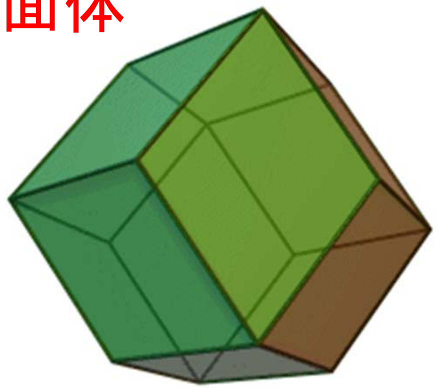
問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解
  - 最適解が複数存在することもあり

実行可能領域と最適解の性質

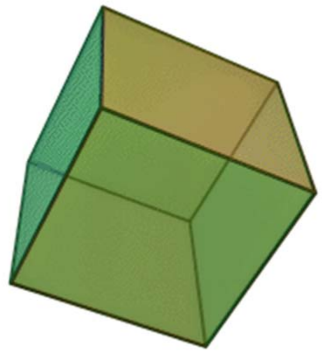
- 一般の n 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は，n 次元実数空間における**凸多面体**
  - 凸多面体の**頂点の中に，必ず最適解**が存在

➔ 最適解を見つけるには，実行可能領域の
頂点を全て調べればよい！



http://en.wikipedia.org/wiki/
Image:Rhombicdodecahedron.gif

- 単純なやり方で頂点を調べると，指数時間が必要
  - 超立方体の場合，頂点の数は 2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - **シンプレックス法（単体法）**



http://upload.wikimedia.org/wikipedia
/commons/4/48/Hexahedron.gif

シンプレックス法

- 線形計画問題の最適解を求めるアルゴリズム
- G. B. Dantzig (1947)が提案
- 「ピボット操作」により，「基底解」を繰り返し更新して，最適解を求める

- 今日の残りの内容：シンプレックス法の説明のための準備
  - 基底解の説明
  - ピボット演算の説明

基底解の定義(その1)

先ほどの例題を
標準形にした問題

目的関数: $-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件:
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 \quad + 2x_2 \qquad\qquad + x_4 &= 8 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

等式 m = 2 個

変数 n = 4 個

➔ n − m = 2 個の変数を 0 とおくと，残りの変数値は一意に定まる

このようにして得られる解を**基底解**と呼ぶ

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 12, x_4 = 8$$
$$x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

基底解の定義(その2)

目的関数: $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

一般に,
標準形の等式が m 個,
変数が n 個のとき,
n − m 個の変数を 0 とおくと,
残りの変数値は一意に定まる(例外有り)

このようにして得られる解を基底解

0とおいた変数は非基底変数, それ以外は基底変数

基底解の各変数値が非負➔基底解は実行可能解

(実行可能基底解と呼ぶ)

基底解に関する注意

n − m 個の変数を 0 とおいても，残りの変数値は一意に定まらないことがある🡸無駄な（不要な）等式条件があるため

等式 m = 3 個
変数 n = 4 個
➔ n – m = 1

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 \;\; + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 8 \\
5x_1 \;\; + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 16 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

x_1=0 とおいても，解は一意に定まらない

$2x_2 + x_3 = 12, 2x_2 + x_4 = 8$ を満たす x_2, x_3, x_4 全てが解

理由：[3番目の等式]＝[1番目]×2－[2番目] なので，「無駄」な等式

基底解を考えるときは，「無駄」な等式が存在しないと仮定

「無駄」な等式の有無は，線形代数の知識を使えば判定可能

基底解と非基底変数の関係

非基底変数の選び方に応じて，基底解は変わる

変数は n 個，非基底変数は n-m個

➔非基底変数の組合せは ${}_nC_{n-m}$ 個➔ ${}_nC_{n-m}$ 個の基底解

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12$$
$$x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 = 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

等式 m = 2 個

変数 n = 4 個

➔ ${}_4C_2$ = 4x3/2 = 6 個の基底解

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)

基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)

基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_4: (0,6,0,−4)

基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)

基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)

基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

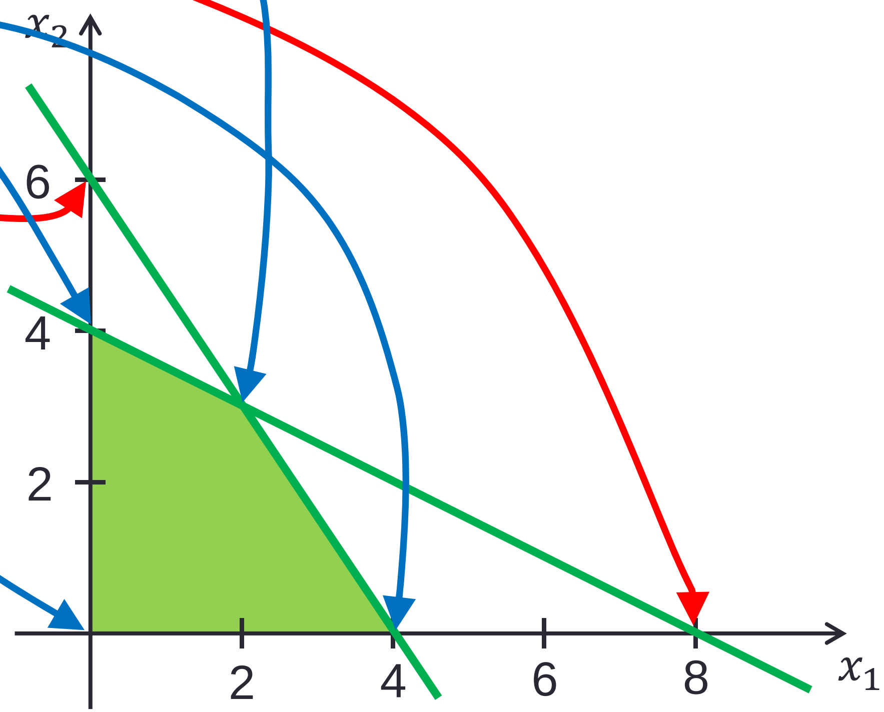
２つは実行不可能，残りは実行可能

基底解と頂点の関係

実行可能な基底解は，実行可能領域の頂点に対応している
➔ 実行可能な基底解の中に，必ず最適解が存在する

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

最適基底解：
最適な基底解のこと

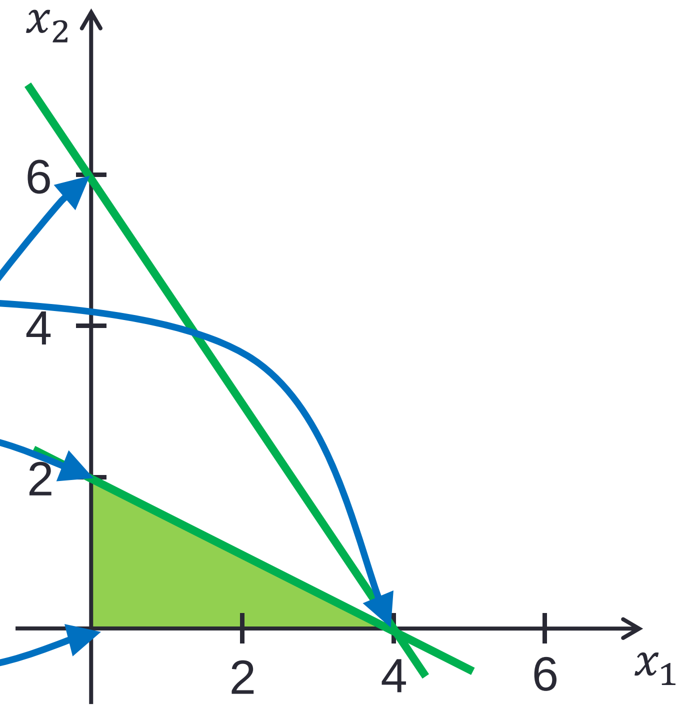


退化した基底解

非基底変数の選び方が違っていても，
同じ基底解が得られることがある🡸退化した基底解と呼ぶ

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件：$3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12$
$x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 = 4$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

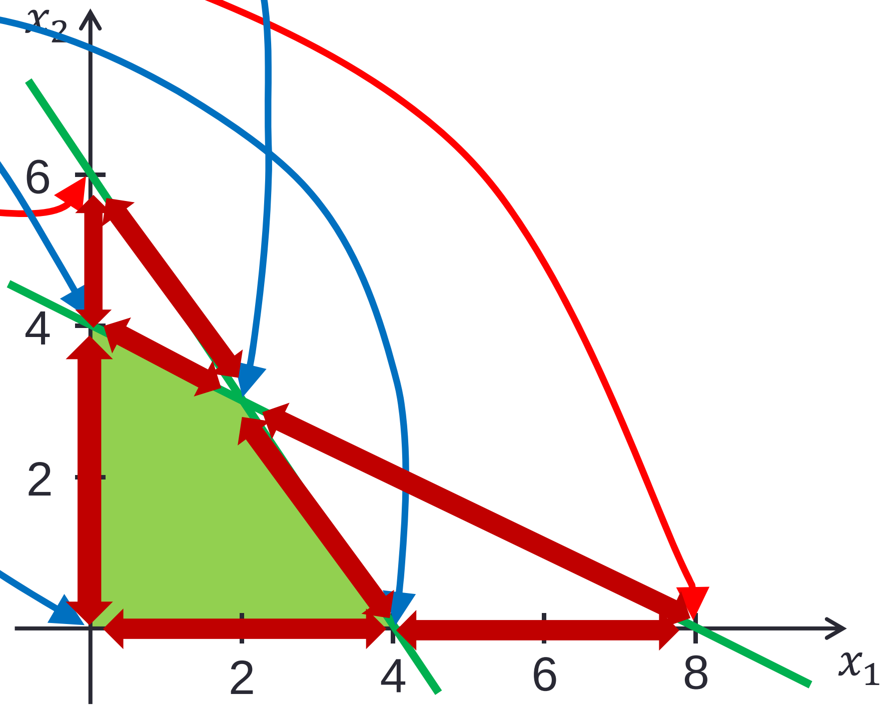
基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (4,0,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (4,0,0,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,0)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,2,8,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−8)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,4)



ピボット操作

ピボット操作：基底変数と非基底変数を1個ずつ入れ替えること
ピボット操作により，基底解は「隣接する」基底解に変わる

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



基底解の最適性の判定(その1)

実行可能基底解の中には必ず最適解が存在

では，どうやって最適性を判定する？➔基底変数を消去するとわかる！

例：実行可能基底解の基底変数が$x_1, x_2, \ldots, x_m$の場合

目的関数：$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \to$ 最小化

制約条件：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

等式制約を変形して

以下の形にする

基底変数を左辺に，

非基底変数を右辺に

おく

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1' - a_{m+1,1}'x_{m+1} - a_{m+2,1}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,1}'x_n \\
x_2 &= b_2' - a_{m+1,2}'x_{m+1} - a_{m+2,2}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,2}'x_n \\
&\vdots \\
x_m &= b_m' - a_{m+1,m}'x_{m+1} - a_{m+2,m}'x_{m+2} - \cdots - a_{n,m}'x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数を0にする

➔基底変数の値が

$x_i = b_i'$ に決まる

この基底解は実行可能なので，$b_i' \geq 0$成立

基底解の最適性の判定（その2）

$$x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n$$
$$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n$$
$$\vdots$$
$$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n$$

元の
線形計画問題に
代入して，
基底変数を消去

基底変数を消去した問題

目的関数：$d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \to$ 最小化

（d は定数）

制約条件：
$$x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0$$
$$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0$$
$$\vdots$$
$$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0$$
$$x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

基底解の最適性の判定（その3）

基底変数を消去した問題

目的関数：$d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \to$ 最小化

（d は定数）

制約条件：

$$x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0$$

$$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0$$

$$x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n \geq 0$と仮定

➔目的関数は $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$のとき最小

つまり，現在の基底解のときに最小➔現在の基底解は最適解

基底解の最適性の判定(その4)

基底解の最適性の判定方法のまとめ:

① 基底解の基底変数を使って,線形計画問題を次の形に書き換える

基底変数を消去した問題

目的関数: $d + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n \to$ 最小化

(d は定数)

制約条件: $x_1 = b'_1 - a'_{m+1,1}x_{m+1} - a'_{m+2,1}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,1}x_n \geq 0$

$x_2 = b'_2 - a'_{m+1,2}x_{m+1} - a'_{m+2,2}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,2}x_n \geq 0$

$\vdots$

$x_m = b'_m - a'_{m+1,m}x_{m+1} - a'_{m+2,m}x_{m+2} - \cdots - a'_{n,m}x_n \geq 0$

$x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

② $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n \geq 0$が成り立つか否かチェック

全て非負➔現在の基底解は最適解

レポート問題（〆切：次回授業13:05まで）

問1：右の線形計画問題を
　　標準形に書き直せ．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：}\ 2x + 2y + 3z \to \text{最大化}\\
&\text{制約条件：}\ 5x + 3z \leqq 8\\
&\qquad 2z = 2\\
&\qquad 4y + z \geqq 9\\
&\qquad x, y \geqq 0
\end{aligned}
$$

問2：右の線形計画問題の基底解をすべて計算せよ．
また，対応する基底変数，非基底変数の組合せを書け．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：}\ -x_1 - x_2 \to \text{最小化}\\
&\text{制約条件：}\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12\\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_4 = 12\\
&\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

レポート問題（〆切：次回授業13：05まで）

問3：右の線形計画問題について考える

①x_1, x_2が基底変数の場合

②x_1, x_4が基底変数の場合

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 12 \\
x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 &= 8 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

それぞれの場合に対し，対応する基底解が最適解か否かを判定せよ．授業で説明したやり方で判定すること．

レポート作成上の注意

- 書籍やWebページなどを参考にしてレポートを作成した場合，その出典を必ず明記すること.
- 他の学生と共同でレポートを作成した場合は，その旨をレポートに書くとともに，レポート作成に関わった学生の名前を全て明記すること.
- これらが守られない場合には，成績を（大幅）減点することもあります.