2011 年度 数理計画法 期末試験問題 [50 点満点]

2012 年 2 月 1 日(木) 13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

問 1（最大流と最小カット）

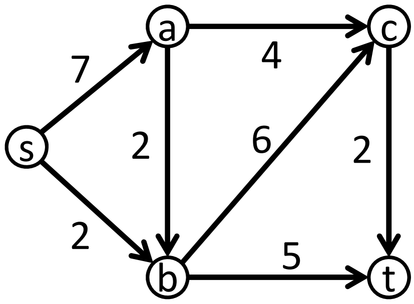

図 1：最大流問題その 1

(1)： 図 1 のネットワークにおいて，頂点 s から t への最大流を求めたい．なお，各枝の数値はその枝の容量を表す．

(1-a)： このネットワークにおける最大流問題を定式化せよ．目的関数及び全ての制約条件を全て書くこと．

(1-b)：このネットワークの最大流をフロー増加法により計算せよ．ただし，アルゴリズム開始時の各枝のフロー量は 0 とする．アルゴリズムの各反復で用いた残余ネットワーク，選んだフロー増加路，更新した後のフローを全て書くこと．

(2)： 図 2 に示される最大流問題について考える．ここで，各枝の数値はその枝の容量を表す．図 3 はこのネットワークにおける最大流を表す．ここで，各枝の数値はその枝のフロー量を表す．

(2-a)： この最大流に関する残余ネットワークを書け．

(2-b)： (2-a)で求めた残余ネットワークを使って，最小カットを計算することが出来る．その**計算方法を説明せよ**．また，実際にその方法を使って**最小カットを計算せよ**．

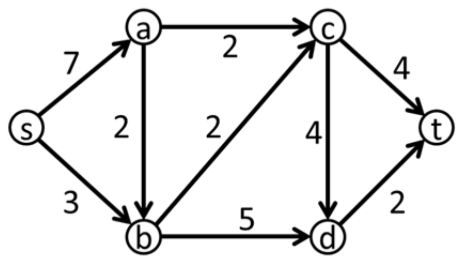

図 2：最大流問題その 2

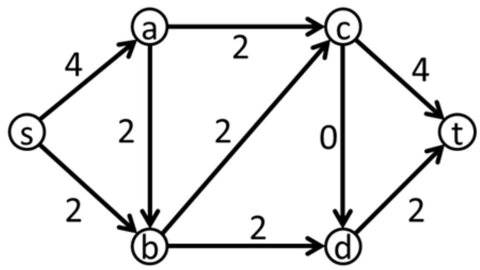

図 3：最大流

問 2（最小費用流問題）

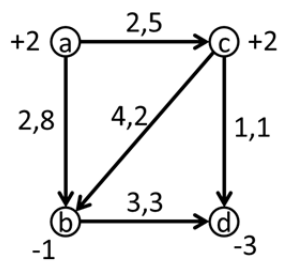

図 4：最小費用流問題

(1)： 図 4 の最小費用流問題について考える．図 4 の各枝に書いてある数字のうち，左側は容量，右側は費用を表す．また，各頂点の数字は需要供給量を表す．

(1-a)： 需要供給量を満たすフローが存在するか否かの判定問題は，最大流問題に帰着することが出来る．その帰着の方法を説明せよ．また，帰着した結果，どのようにして存在性を判定するか，説明せよ．なお，**需要供給量を満たすフローを実際に計算する必要はない**．

(1-b)： 負閉路除去法を使って図 4 のネットワークの最小費用流を求めよ．ただし，図 5 に示したフローを初期フローとすること．アルゴリズムの各反復で用いた残余ネットワーク，選んだ負閉路，更新した後のフローを全て書くこと．

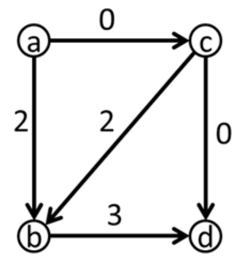

図 5：初期フロー

（次のページに続く）

(2)：以下で述べる研究室配属決定問題は，最小費用流問題に帰着することが出来る．どのような最小費用流問題を考えれば良いか，説明せよ．なお，**問題の最適解を求める必要はない**．

［研究室配属決定問題］ 学生 A，B，C，D の 4 人を研究室 X，Y，Z のいずれかに配属させたい．各研究室の定員は 2 人である．配属決定の際は，学生の満足度の合計値が最大となるようにしたい．各学生の各研究室に配属されたときの満足度は表 1 の通りである．どのように配属先を決めたらよいだろうか？

表 1：学生の満足度

研究室＼学生	A	B	C	D
X	8	8	7	1
Y	9	5	6	1
Z	1	5	6	9

問 3（非線形計画問題）

(1)：n 変数の関数fが凸関数であることの定義を書け．（ヒント：図による説明だけでは不十分）

(2)：次の関数fが凸関数であることを，定義に基づいて証明せよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0\text{ のとき}) \\ x & (x \geq 0\text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)：制約なしの関数最小化問題の解法として，最急降下法とニュートン法が知られている．最急降下法とニュートン法の手順をそれぞれ詳しく説明せよ．

(4)：最急降下法と比較したときのニュートン法の良い点と悪い点をそれぞれ 1 つずつ述べよ．

問 4（非線形計画問題）

(1)：n 変数の関数 f およびベクトル x に対して，x が局所的最適解であるための

(a)一次の必要条件，(b)二次の十分条件，および(c)二次の必要条件，

をそれぞれ書け．勾配ベクトルやヘッセ行列を使って書くこと．

(2)：次の関数について考える．

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + 2y^2$$

(2-a)：関数 f の勾配ベクトル及びヘッセ行列を求めよ．

(2-b)：関数 f の停留点をすべて求めよ．また，問(1)の結果を用いて，各停留点が局所的最適解か否かを判定せよ．

(2-c)：関数 f の(x, y)=(2, 1)における 2 次のテイラー展開を求めよ．