数理計画法　第8回

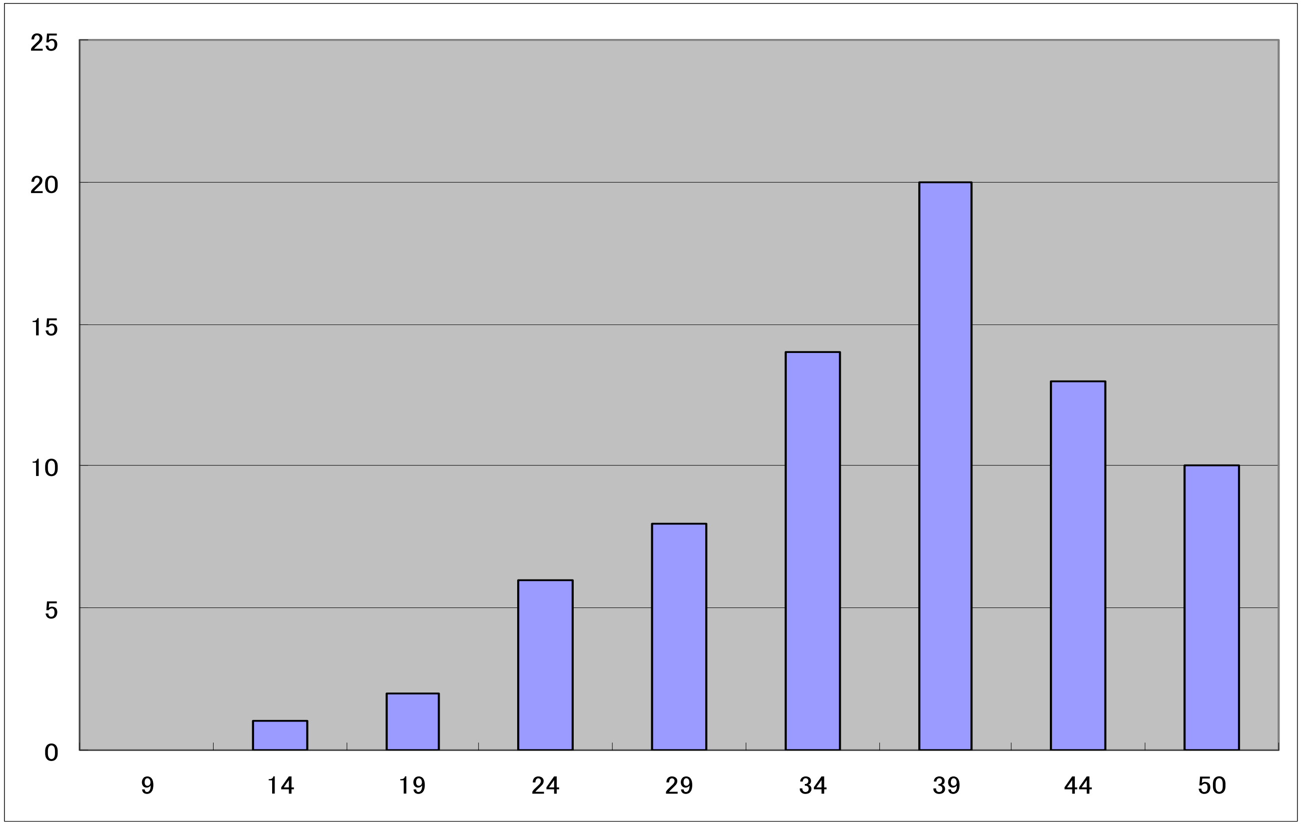
ネットワーク計画

最大フローと最小カット

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

中間試験の結果

- 受験者74名，合格64名，不合格10名
- 平均点35.1点（問1：8.9/11,問2：6.7/12,問3：10.3/13,問4：9.2/14）
- 最高点50点（2名）



復習：最大フロー問題

目的：供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい

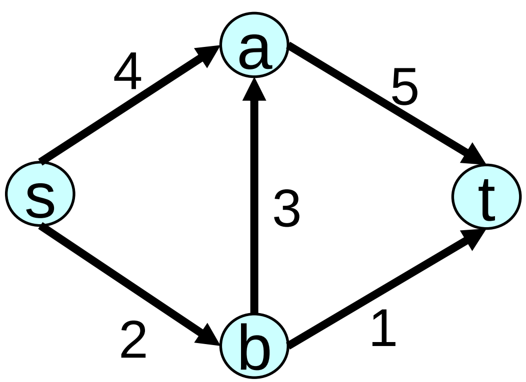
条件1（容量条件）：

0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量

条件2（流量保存条件）：

頂点から流れ出すフローの量＝　流れ込むフローの量

問題例と定式化



最大化　f

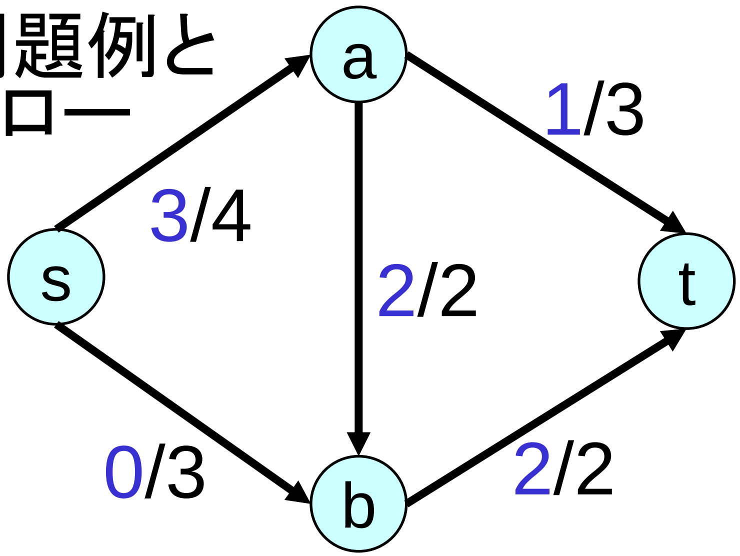
条件

$$
\begin{aligned}
& x_{sa} + x_{sb} = f \\
& x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0 \\
& x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0 \\
& -x_{at} - x_{bt} = -f \\
& 0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3, \\
& 0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1
\end{aligned}
$$

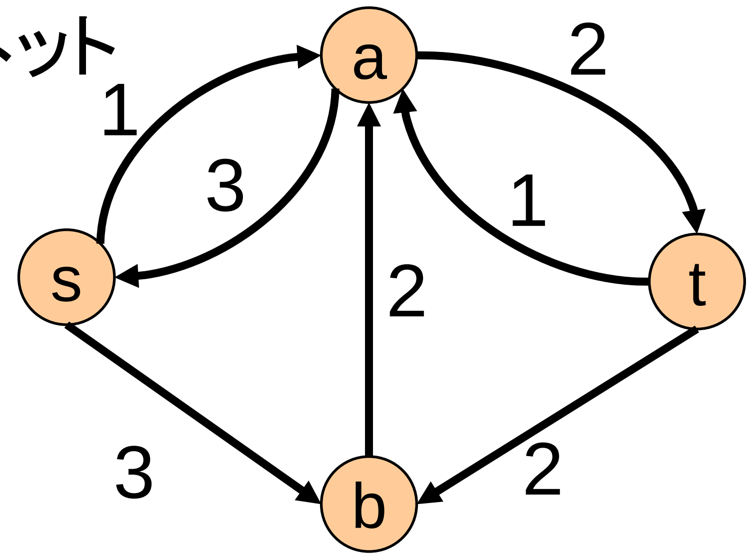
復習：残余ネットワーク

残余ネットワーク：最大フローを求めるための「道具」

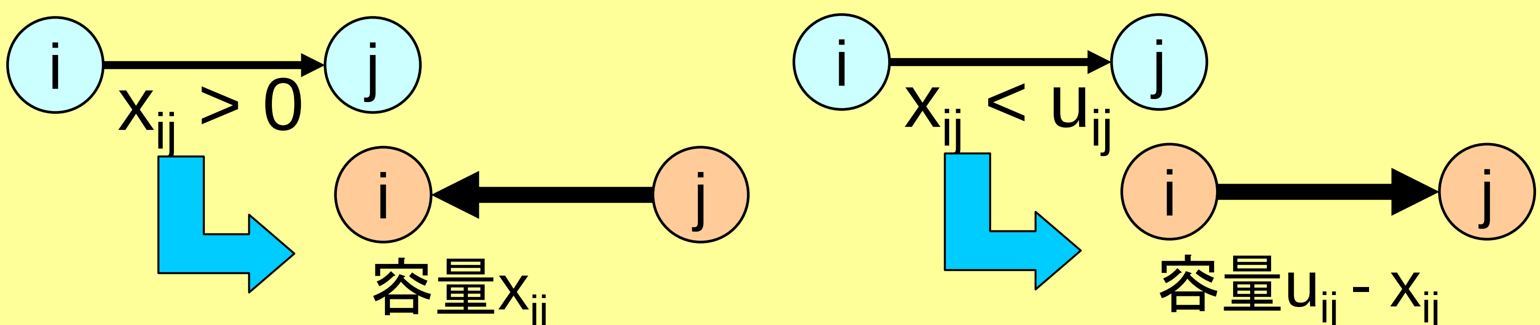
問題例とフロー



残余ネットワーク



次の操作を各枝に対して行う



復習：残余ネットワークに関する定理

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

証明は前回行なった

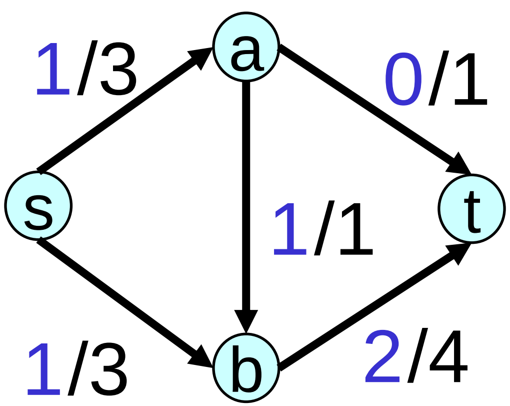
定理２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

証明は今回行なう

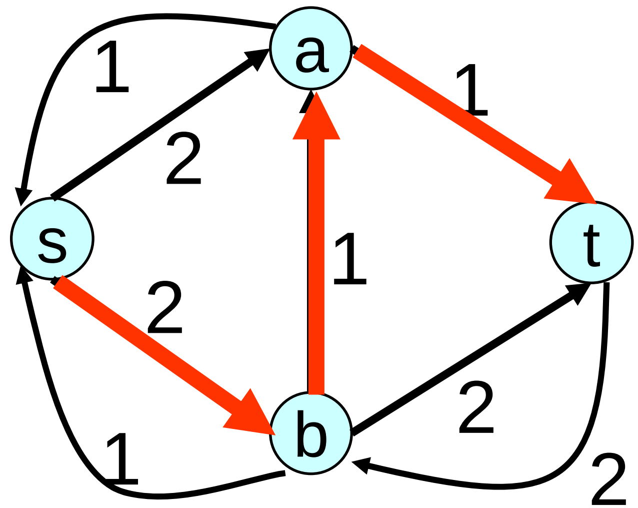
復習：定理１の例

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

与えられた問題と
現在のフローx

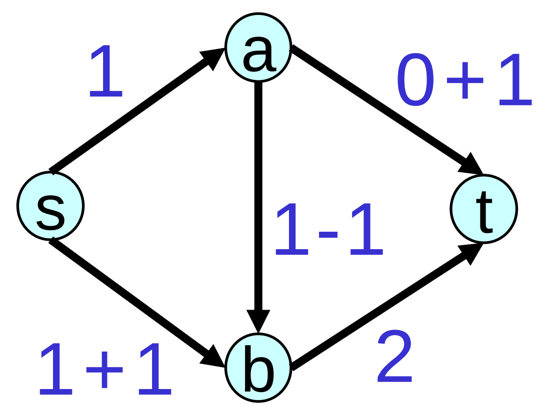


残余ネットワーク



s–t パスが存在

新しいフローx'

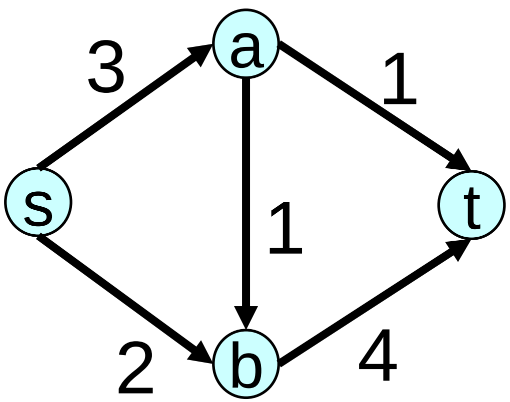


フロー値が
１増えた

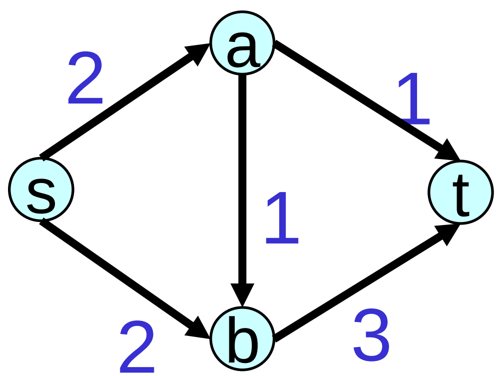
復習:定理2の例

定理2:残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

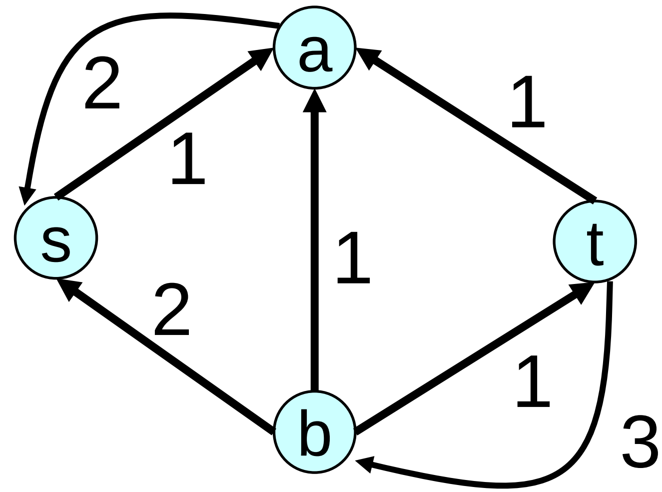
与えられた問題



現在のフロー



残余ネットワーク



s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

復習:フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0:初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1:現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2:残余ネットワークに s-t パスが存在しない

⇒ 終了

ステップ3:残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する

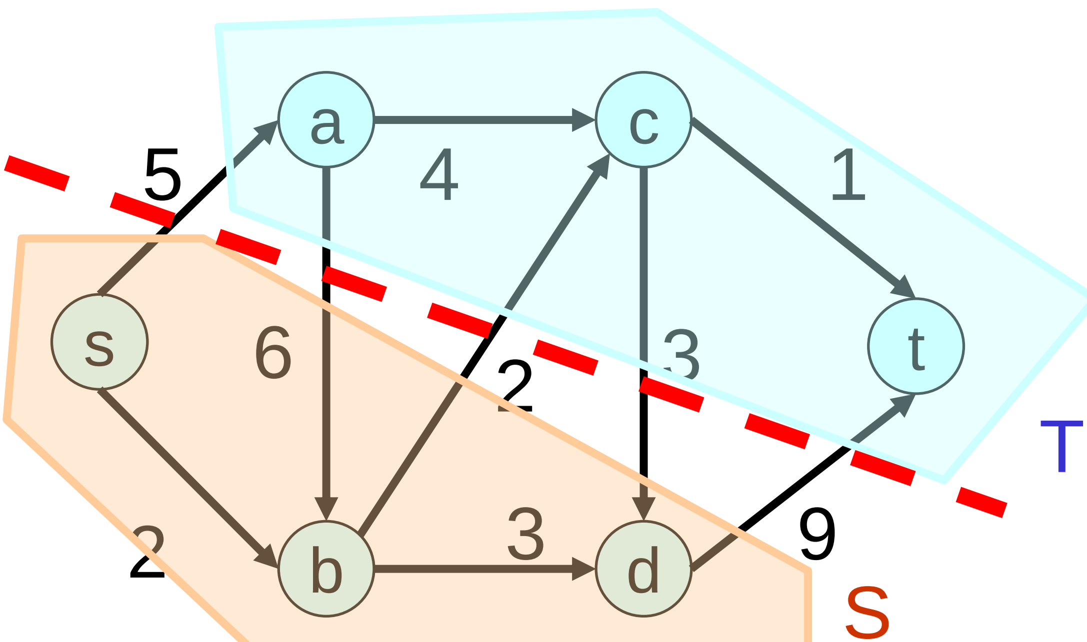
ステップ4:ステップ1へ戻る

s-t カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこにあるか？

s-t カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（S∩T = ∅, S∪T = V）
S は供給点 s を含む，Tは需要点 t を含む

s-t カット (S, T) の容量U(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和



U(S,T)=5+2+9=16

s-t カットの性質(その1)

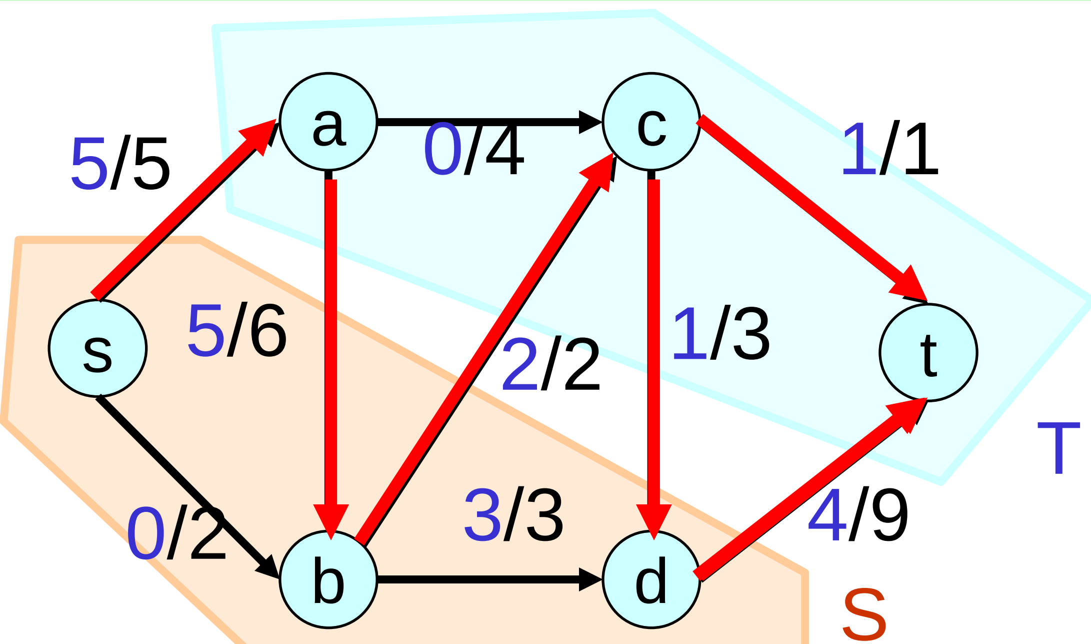
性質1：

任意のs-tカット(S, T) と任意のフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフロー量の和 x(S,T)

− TからSへの枝のフロー量の和 x(T,S)

＝ フロー値 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

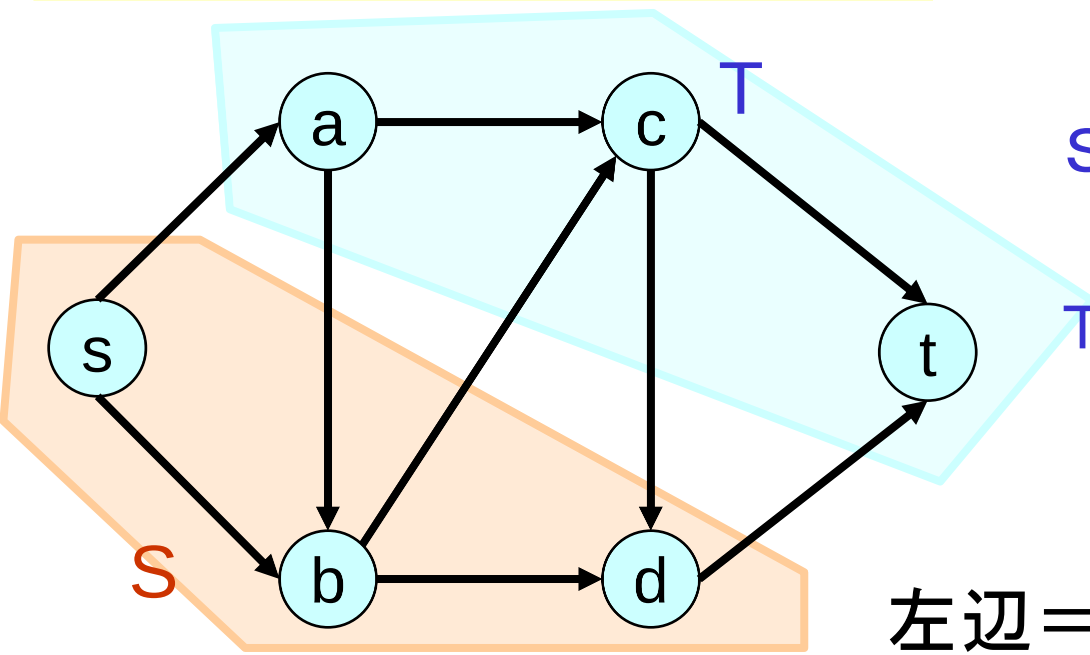
f = 11 – 6 = 5

s-t カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は
登場しない

左辺$=(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

s-t カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$\Sigma\{x_{kj}$ | (k,j) は k から出る$\}$

$- \Sigma\{x_{ik}$ | (i,k) は k に入る$\} = 0$ $\quad (k \in S - \{s\})$

$\Sigma\{x_{sj}$ | (s,j) は s から出る$\} - \Sigma\{x_{is}$ | (i,s) は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が－1

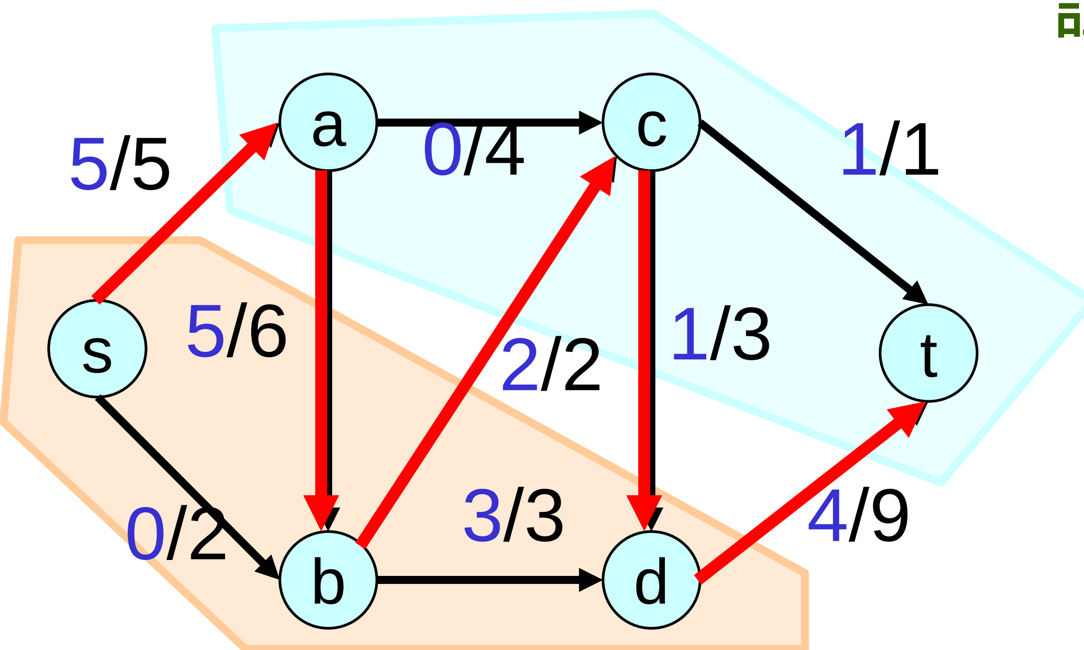
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

⇒ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

s-t カットの性質（その2）

性質2：任意のs-tカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フロー値 f ≦ カットの容量 U(S,T)



f = 5 ≦ 16 = U(S, T)

証明:

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ U(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ U(S, T) – 0
= U(S, T)

最小カット問題

性質2： 任意のs-tカットとフローに対し
フロー値 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理
に対応

⇒ カットの容量は最大フローのフロー値に対する上界を与える

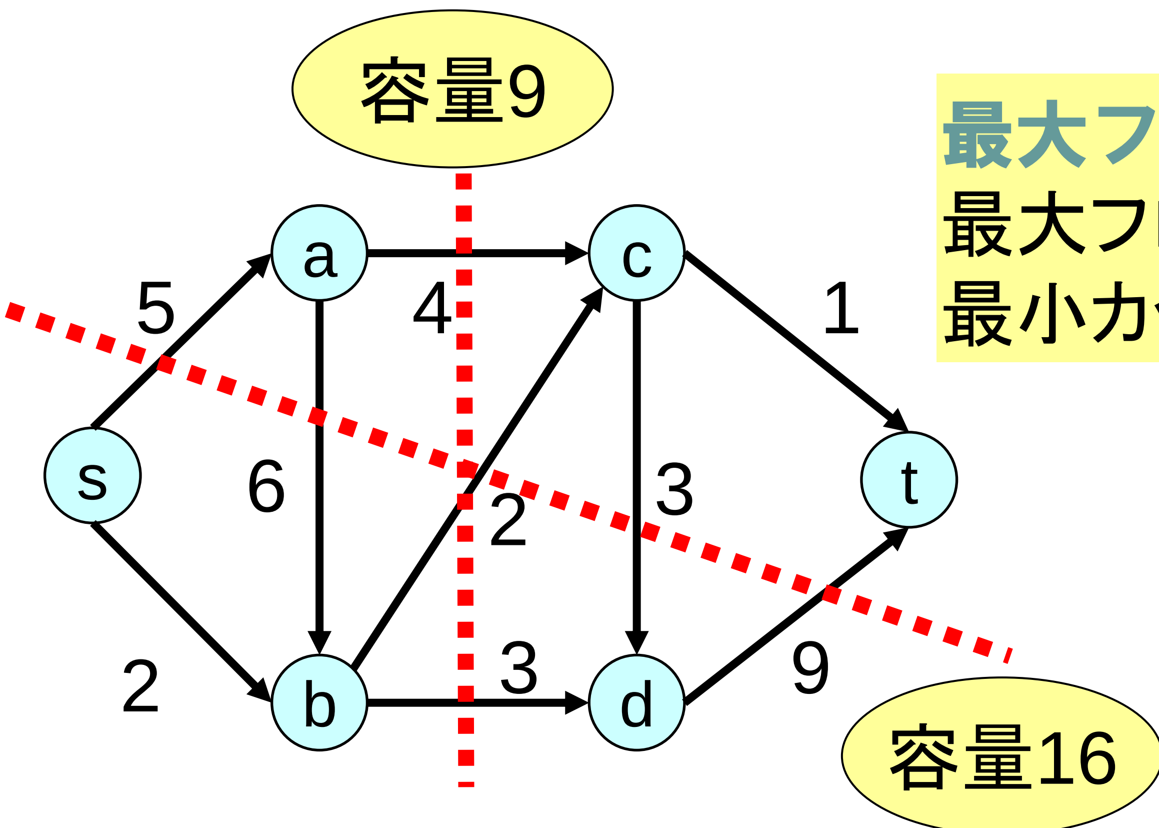
より良い上界を求めたい⇒最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）

最小カット問題は最大フロー問題の双対問題

最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



最大フロー最小カット定理
最大フローのフロー値と
最小カットの容量は等しい

以降はこの定理の
証明を行う

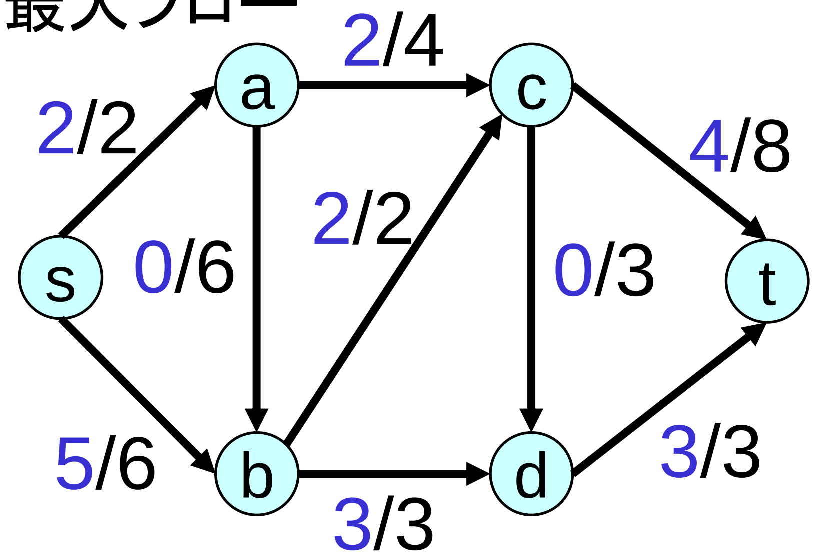
最大フロー最小カット定理の証明（その1）

性質2： 任意のs-tカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フロー値 f ≦ カットの容量 U(S,T)

あるフロー(x_{ij} | (i,j) ∈ E) と
ある s-t カット(S, T)が f = U(S, T) を満たす
➔性質2より，現在のフローは最大フロー,
(S,T) は最小カット

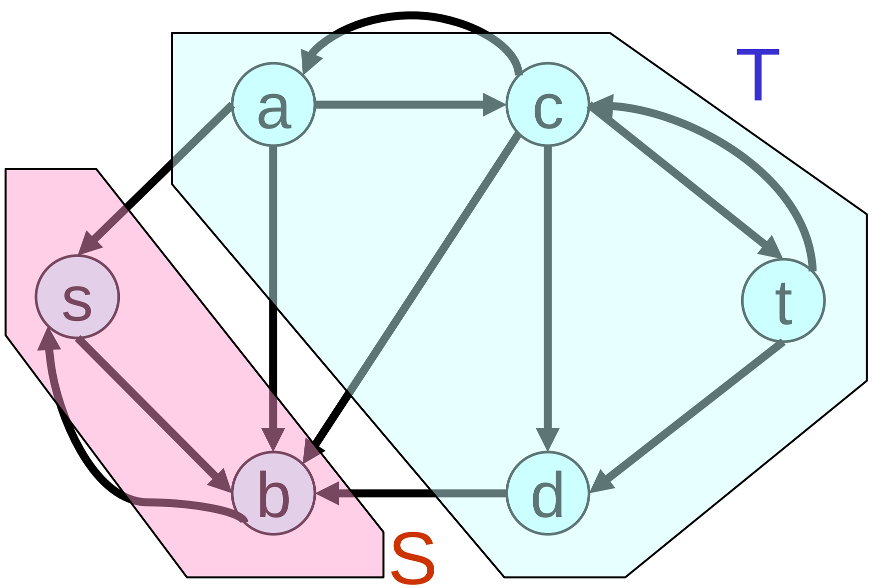
フロー増加法の終了時に、
このようなフローと s-tカットが実際に存在することを示す

最大フロー最小カット定理の証明(その2)



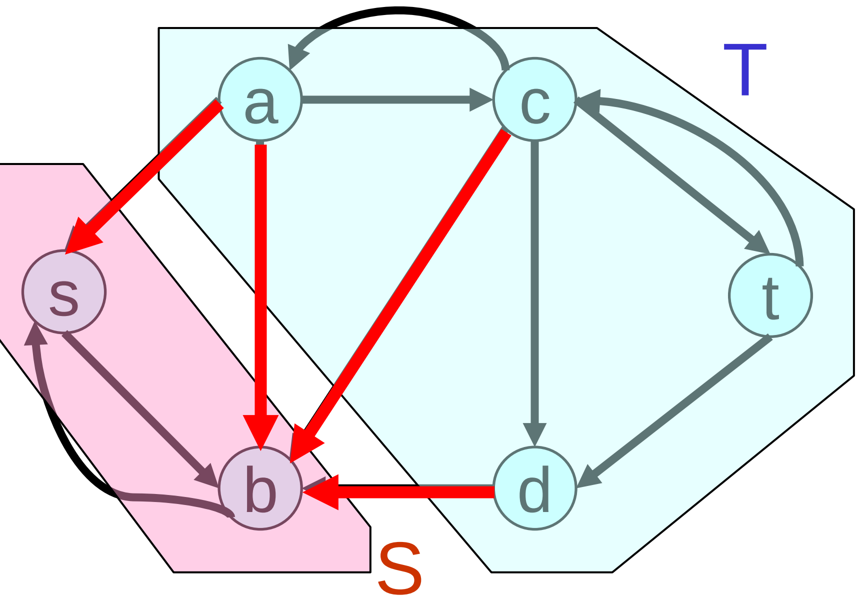
最大フローに対して
残余ネットワークを作る

残余ネットワークには
s-t パスが存在しない



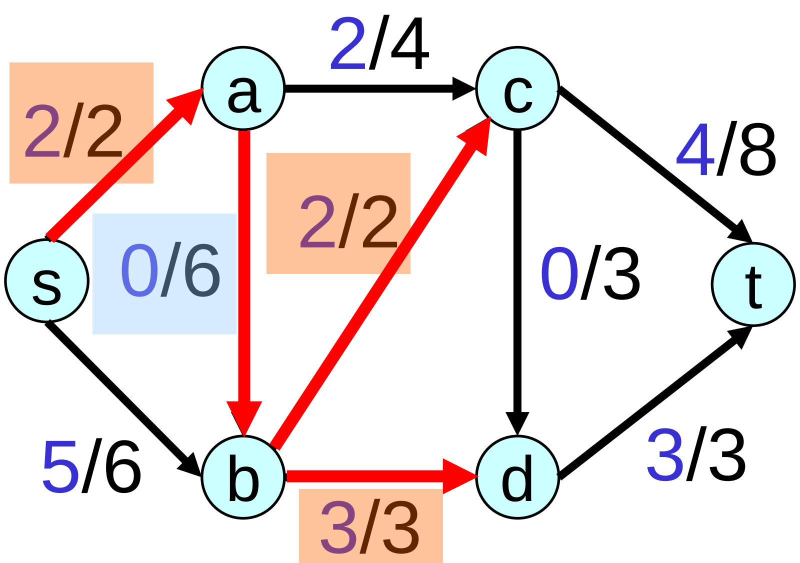
S = 残余ネットワークにおいて
s から到達可能な頂点集合
T = V – S
に対し、(S, T) は s-t カット

最大フロー最小カット定理の証明(その3)



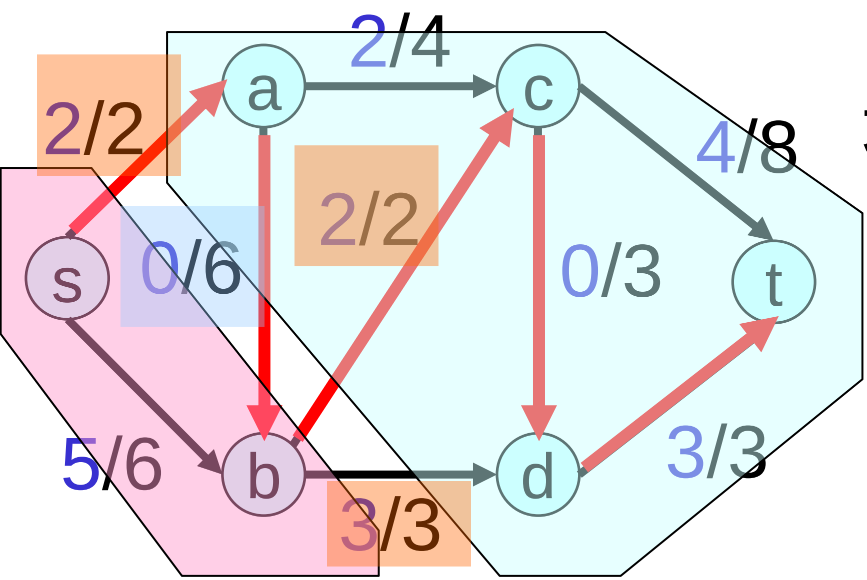
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大フロー最小カット定理の証明(その4)



元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$

$= \Sigma\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\} = U(S, T)$

$x(T, S) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$

$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = U(S, T)$

性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore\ f = U(S, T)$ (証明終わり)

注：以上の証明は定理1の証明にもなっている

最大フロー最小カット定理

定理： フロー増加法により求められたフローは最大フロー

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

T = V – S

とすると、(S, T) は最小s-t カット

さらに　$f = U(S,T)$　が成り立つ

最大フロー最小カット定理：

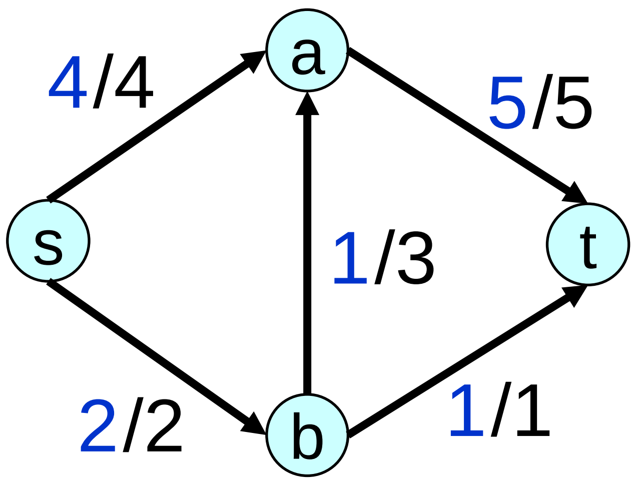
最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小s-tカット(S,T)に対し

$$f = U(S,T)$$

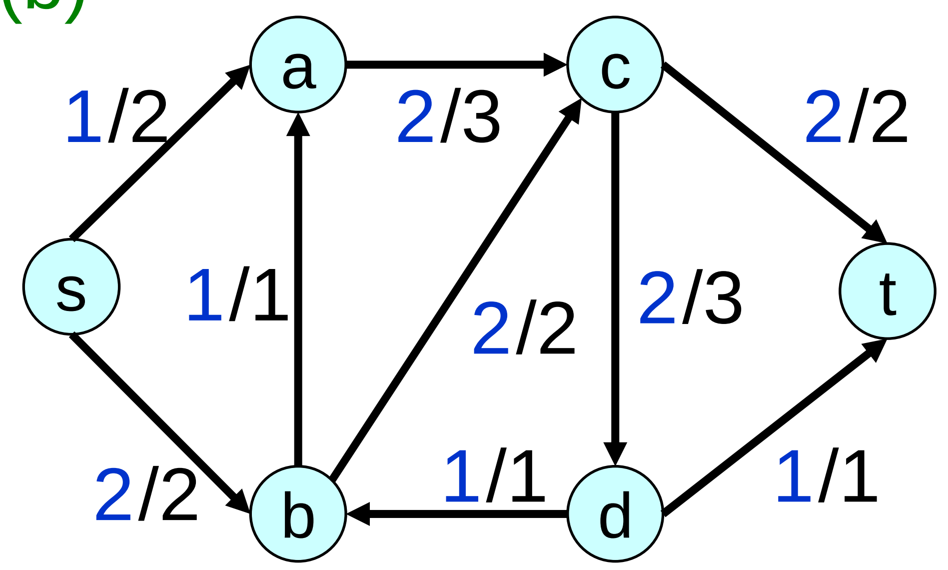
レポート問題

問１：下記の図は，最大フロー問題およびその最大フローを表す．
これらのフローに対し，残余ネットワークを書きなさい．
また，授業でやったやり方に従って最小 s-t カットを求めよ

(a)

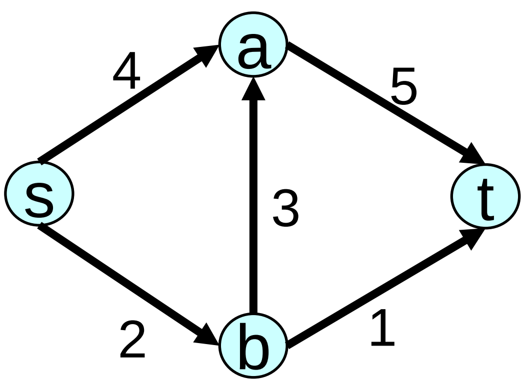


(b)



レポート問題

問２： 次のネットワークにおいて，S={s, a}, T={b, t}としたときに，x(S, T) – x(T, S) = f が成り立つことを，下記の定式化を使って証明しなさい．

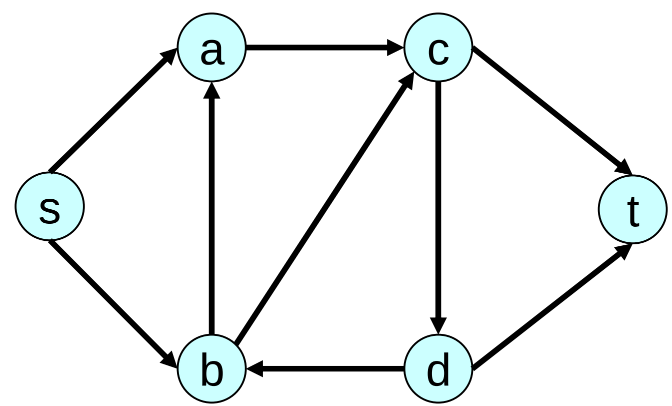


最大化 f

条件

$$
\begin{aligned}
&x_{sa} + x_{sb} = f \\
&x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0 \\
&x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0 \\
&-x_{at} - x_{bt} = -f \\
&0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3, \\
&0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1
\end{aligned}
$$

問３： 右のネットワークにおいて，最小カットが({s,b,d}, {t,a,c}) となるような各枝の容量を求めなさい．（全部の枝の容量が0というのは不可）



応用:プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

各チームの優勝可能性を判定したい

エクスポスの優勝可能性

× 残り全勝しても80勝止まり

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィリーズ	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの優勝可能性

×

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83 83	71		1	6	1
フィリーズ	80 81	79	1		0	2
メッツ	78 84	78	6	0		0
ナショナルズ	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で下位チームが上位チームに勝った場合

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝の可能性はゼロではない

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

では，次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所属のチームとの試合

	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	タイガース	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
タイガース	49	86	3	4	0	0		20

タイガースは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上➔優勝の可能性？

最大フロー問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

タイガースにとって都合の良いケースのみ考える

- タイガースは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗

⇩

東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

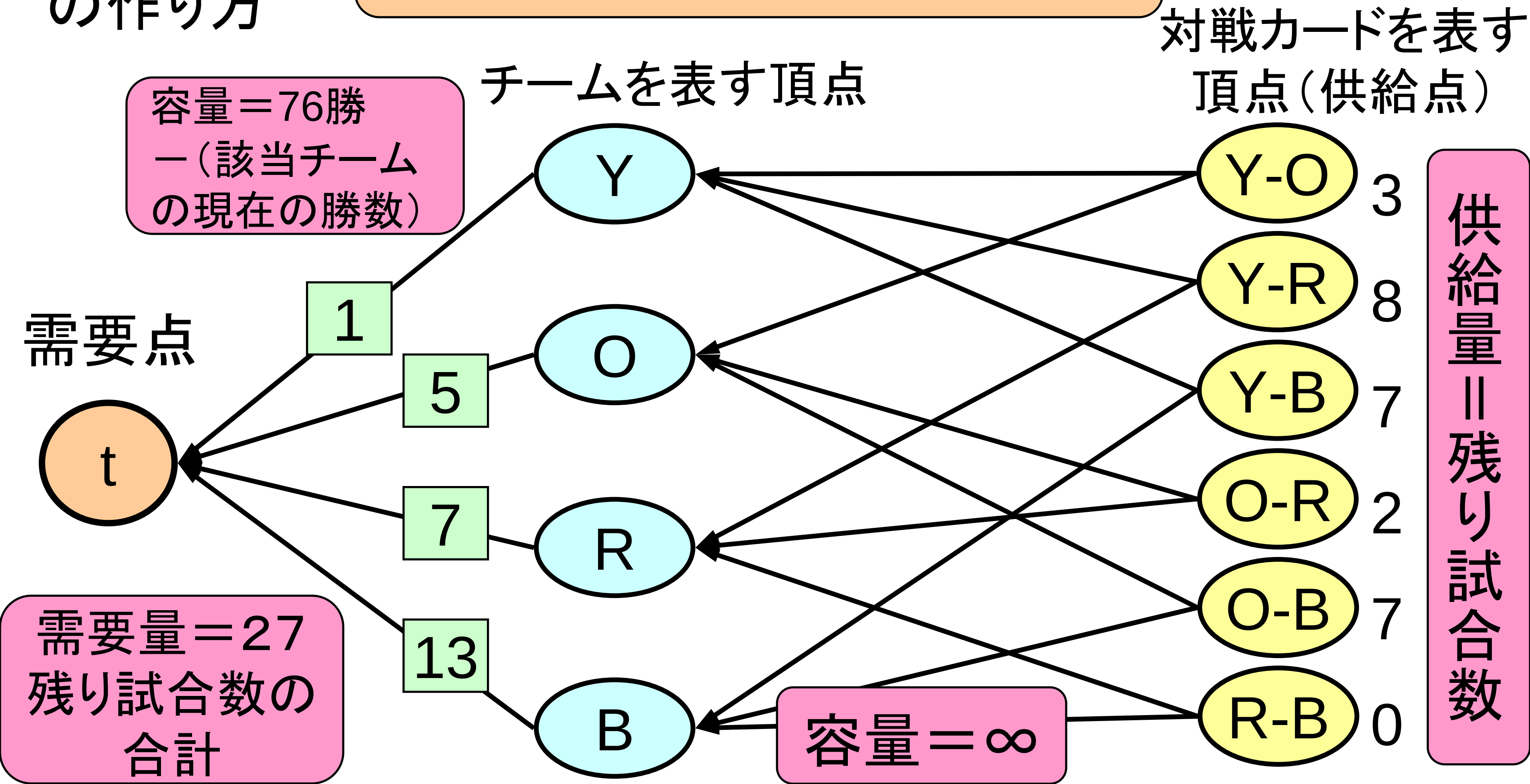
- どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
  ➔優勝の可能性なし　需要供給を満たすフローが存在しない
- あるケースにおいては，他チームは全て76勝以下
  ➔優勝の可能性あり　需要供給を満たすフローが存在する

需要供給を満たすフローを求める問題に帰着

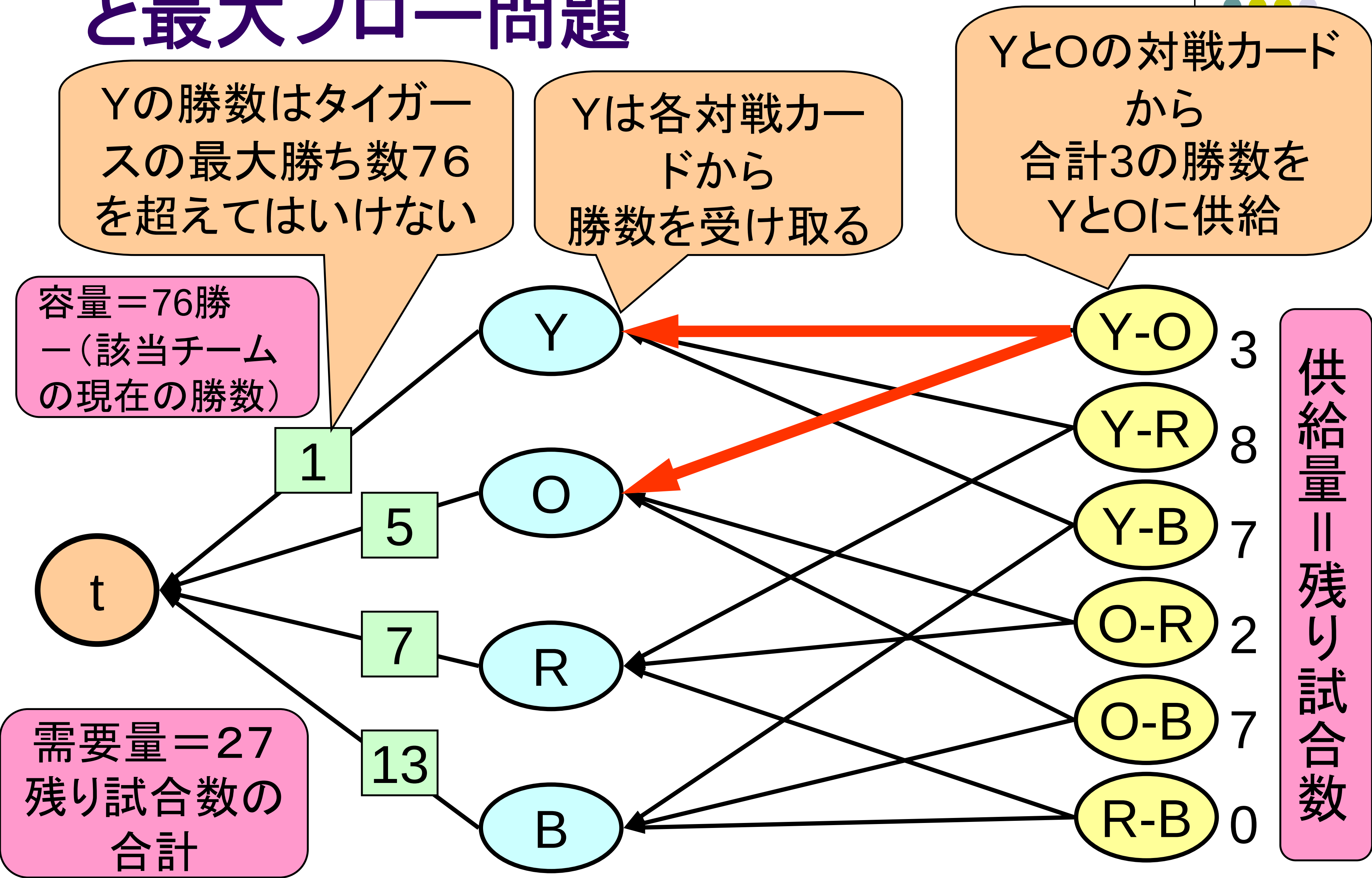
プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

ネットワークの作り方

需要供給を満たすフローが存在
⇔優勝可能性が存在



プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題



演習問題（レポート提出の必要なし）

問題：ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ