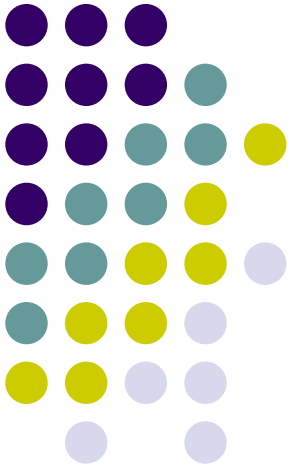
数理計画法 第6回

ネットワーク最適化

ネットワーク最適化問題とは？
最大フロー問題



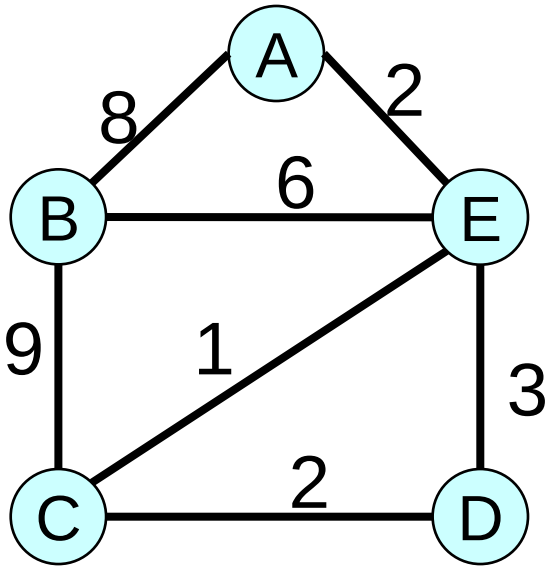
担当： 塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

中間試験について

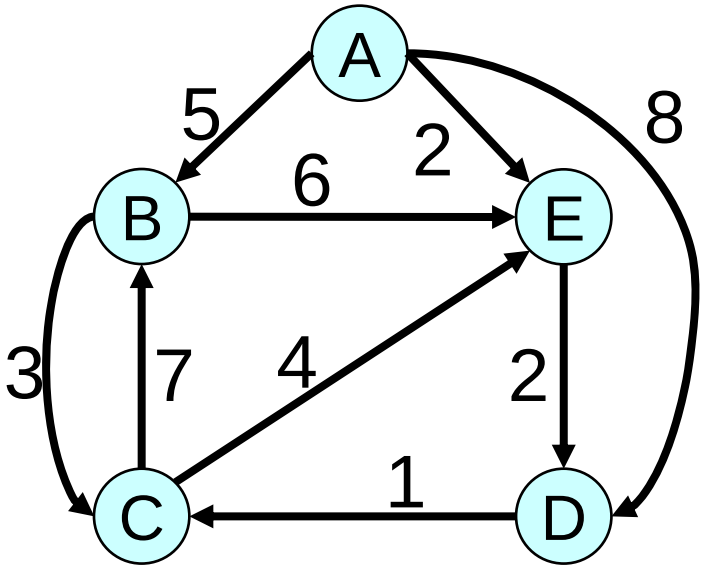
- 日時：12月2日（木）午後1時より
- 受験資格者：今日までにレポートを
  一回以上提出した学生のみ
- 教科書等の持込は不可
- 座席は指定
- 試験内容：第1回～第5回（前回）の講義内容
  問題の定式化，単体法，用語の説明，簡単な証明など
  （詳しくはWeb上の過去問を参考にしてください）

グラフとネットワーク

★（無向、有向）グラフ(undirected/directed graph)
頂点（vertex, 接点、点）が枝（edge, 辺、線）で結ばれたもの
★ネットワーク(network)
頂点や枝に数値データ（距離、コストなど）が付加されたもの

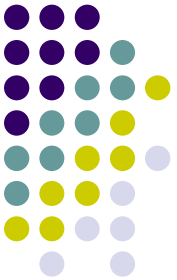


無向グラフ



有向グラフ

ネットワーク最適化問題



「ネットワーク」に関する数理計画問題（最適化問題）

例：
- 最小木問題
  (minimum spanning tree prob.)
- 最短路問題
  (shortest path prob.)

} 他の講義で扱う「アルゴリズムとデータ構造」「情報数学」

- 最大フロー問題
  (maximum flow prob.)
- 最小費用フロー問題
  (minimum cost flow prob.)
- 割当問題
  (assignment prob.)

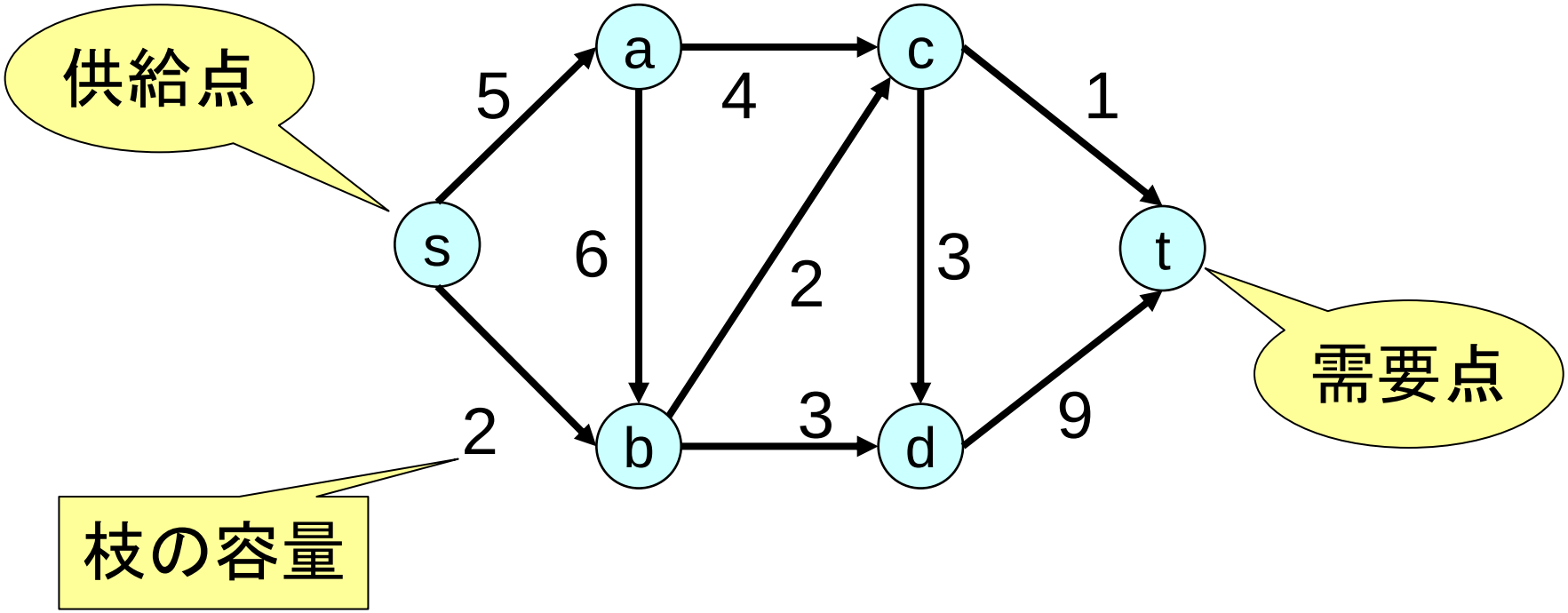
} この授業で扱う

最大フロー問題の定義（その1）

入力：有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$



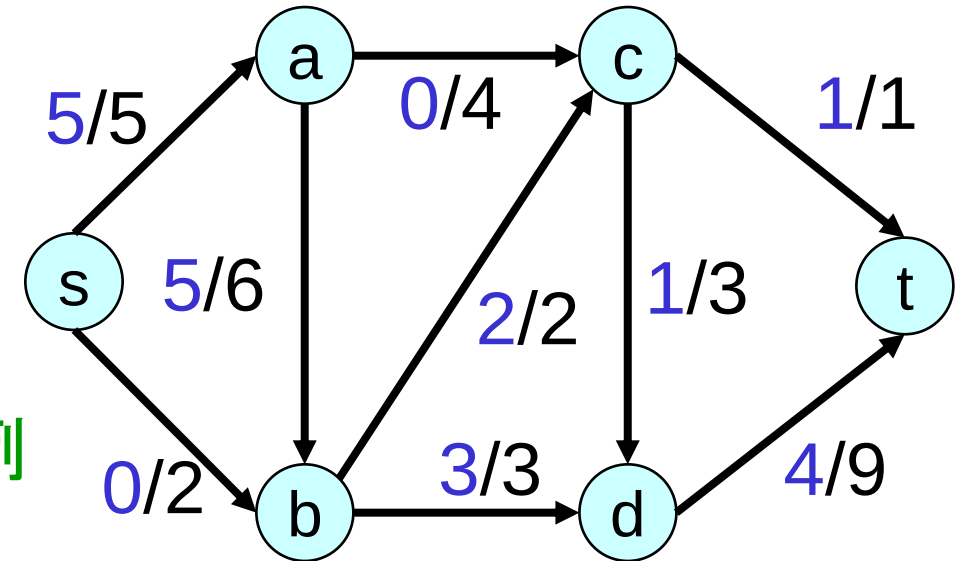
最大フロー問題の定義（その2）

目的：供給点から需要点に向けて、枝と頂点を経由して
「もの」を出来るだけたくさん流す

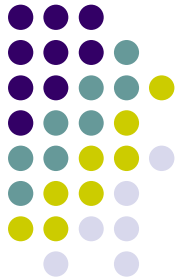
条件1（容量条件, capacity constraint）：
0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量

条件2（流量保存条件, flow conservation constraint）：
頂点から流れ出す「もの」の量＝　流れ込む「もの」の量

許容解の例

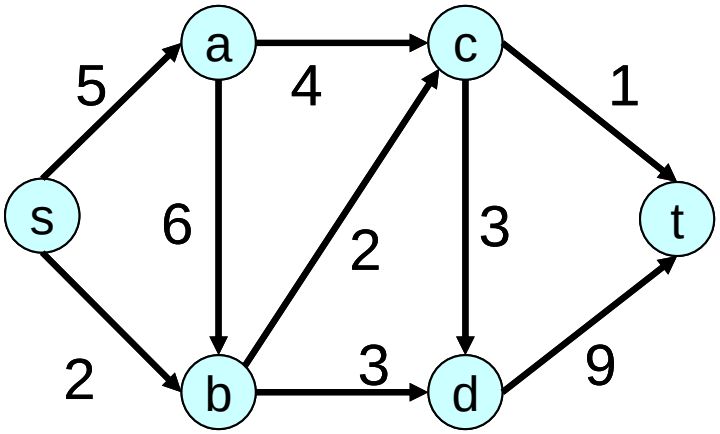


最大フロー問題の定式化：変数，目的関数と容量条件



変数 x_{ij}：フロー＝枝 (i, j) を流れる「もの」の量
変数 f：フロー量＝需要点に流れ込む「もの」の量
（＝ 供給点から流れ出す「もの」の量）

目的：供給点から需要点に「もの」をたくさん流したい
⇒ 最大化　f
容量条件：0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
⇒ $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$



具体例
目的：最大化　f
容量条件：
$0 \leqq x_{sa} \leqq 5,\ 0 \leqq x_{sb} \leqq 2,\ 0 \leqq x_{ab} \leqq 6,$
$0 \leqq x_{ac} \leqq 4,\ 0 \leqq x_{bc} \leqq 2,$
…

最大フロー問題の定式化：流量保存条件

流量保存条件：

(頂点から流れ出す「もの」の量) − (流れ込む「もの」の量) ＝ 0

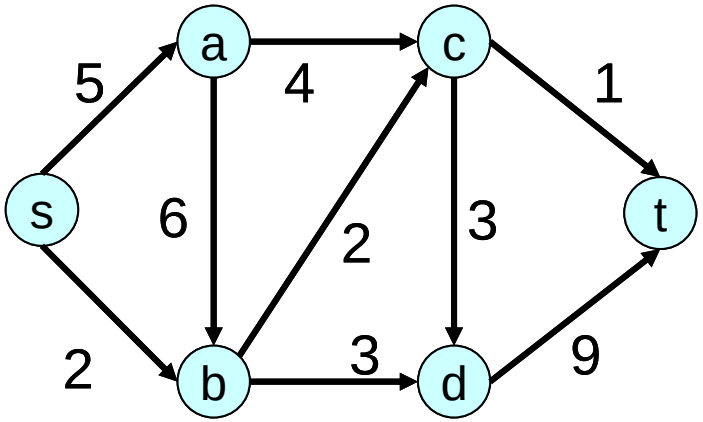
⇒ $\Sigma\{x_{kj} \mid$ 枝 (k,j) は 頂点 k から出る$\}$

$- \Sigma\{x_{ik} \mid$ 枝 (i,k) は 頂点 k に入る$\}$ ＝ 0 $(k \in V - \{s, t\})$

供給点と需要点に関する条件：

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\} - \Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -f$



流量保存条件の例：

$x_{ac} + x_{ab} - x_{sa} = 0$

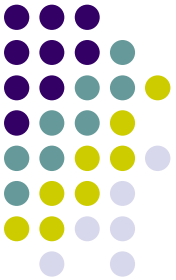
$x_{bc} + x_{bd} - x_{ab} - x_{sb} = 0$

$x_{ct} + x_{cd} - x_{ac} - x_{cb} = 0$

$x_{dt} - x_{cd} - x_{bd} = 0$

$x_{sa} + x_{sb} = f, \quad - x_{ct} - x_{dt} = -f$

最大フロー問題の定式化:まとめ



最大化　f

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$

$- \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$　$(k \in V - \{s, t\})$

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$

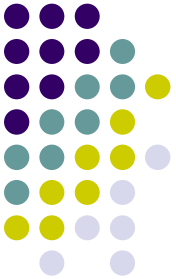
$- \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\}$

$- \Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = - f$

この問題の許容解 x_{ij} --- フロー(flow)
フローの目的関数値 f --- フロー値(flow value)

最大フロー問題の解法



最大フロー問題は線形計画問題の特殊ケース

⇒　単体法で解くことが可能！

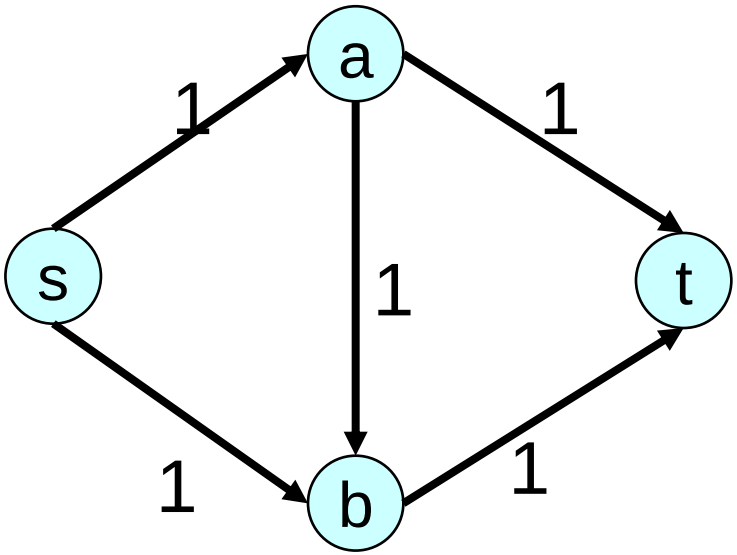
最大フロー問題は良い（数学的な）構造をもつ

⇒　この問題専用の解法（フロー増加法など）

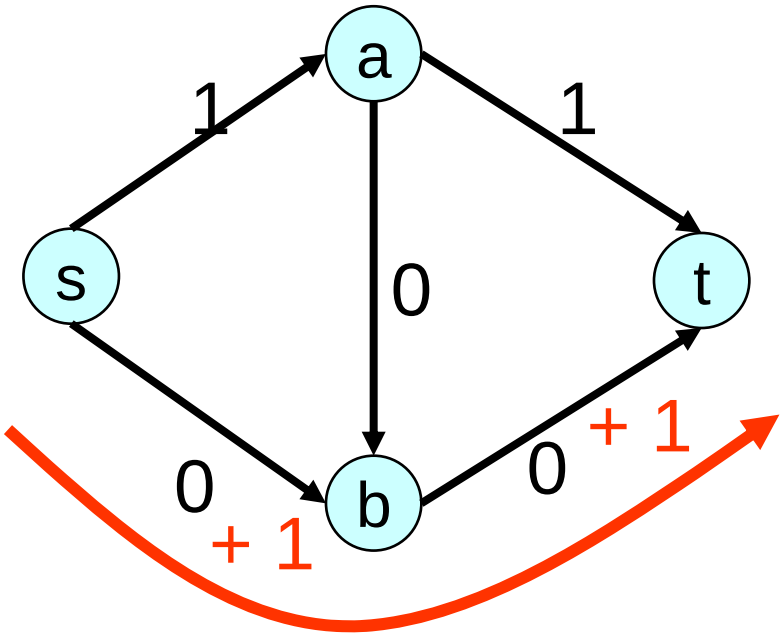
を使うと，より簡単，かつより高速に解くことが可能

最大フローの判定

問題の例



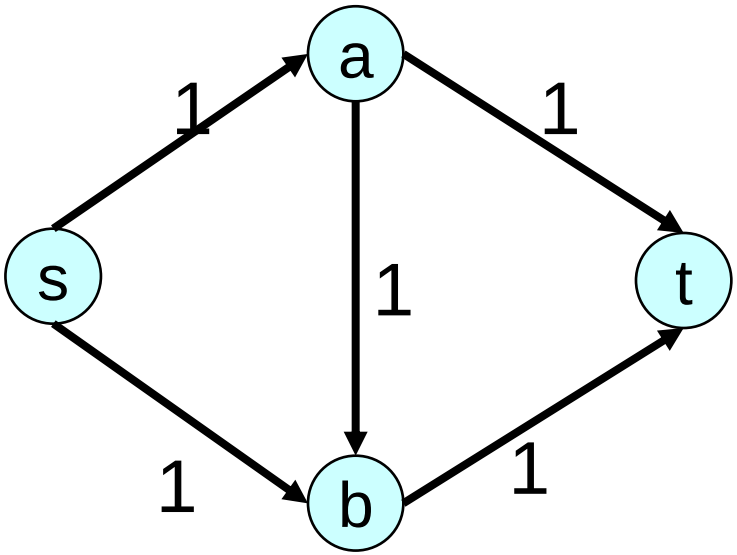
フローの例1：最大？



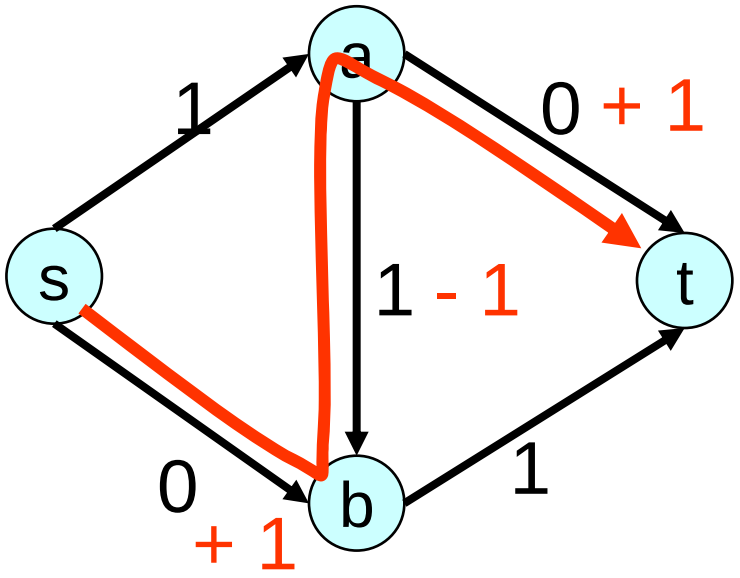
最大フローではない

最大フローの判定

問題の例



フローの例2：最大？



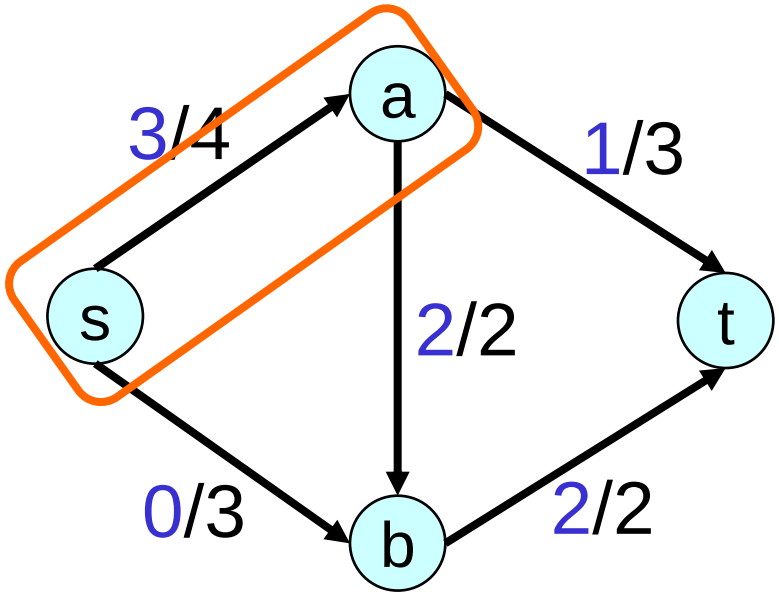
最大フローではない

最大フローであることの判定を効率よく行うには？

⇒ 残余ネットワーク(residual network)を利用

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

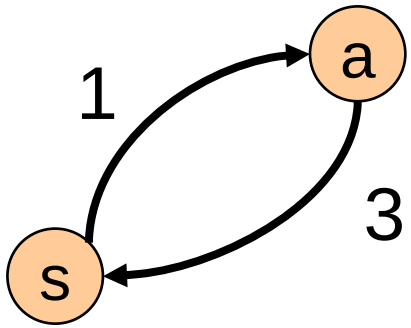
各枝のデータは

（フロー量/容量）

枝(s,a)において

☆さらに4－3＝1だけフローを流せる

⇒　残余ネットワークに
容量1の枝(s,a)を加える

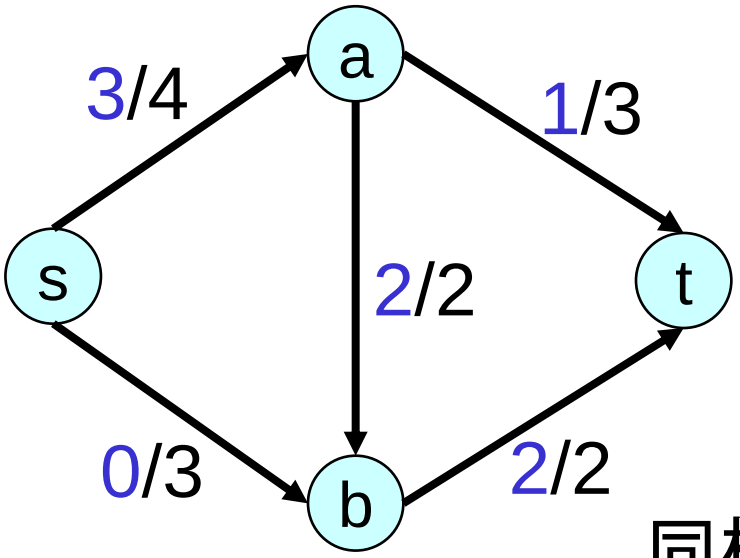


☆現在のフロー3を逆流させて0にすることが出来る

⇒　容量3の枝(a,s)を加える

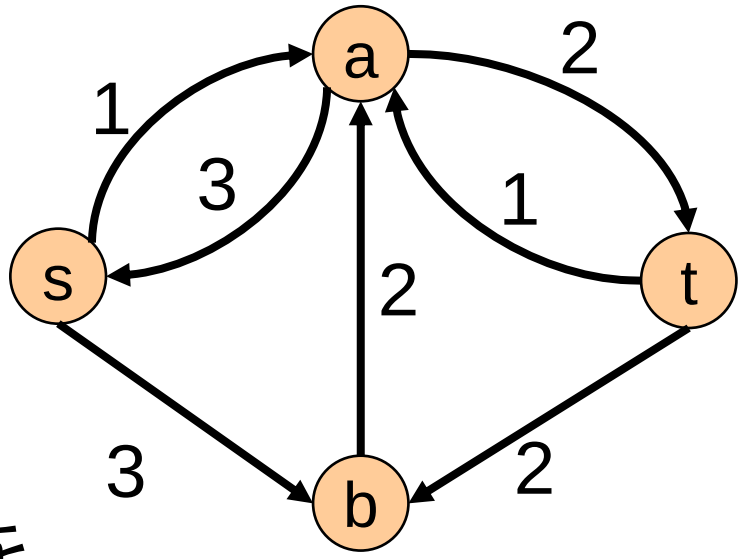
残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

同様の操作を
各枝に行う



残余ネットワーク
の完成

残余ネットワークの定義（まとめ）

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

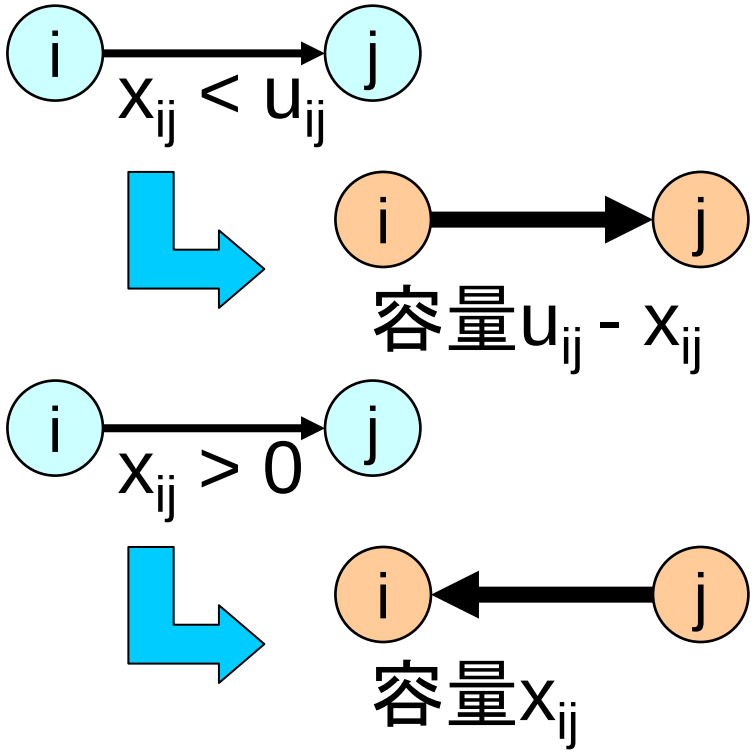
$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

各枝の容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

逆向きの枝集合

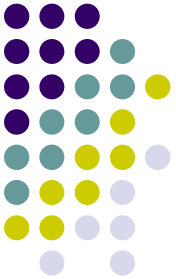
$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

各枝の容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$



注意！：現在のフローが変わると残余ネットワークも変わる

残余ネットワークに関する定理



定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

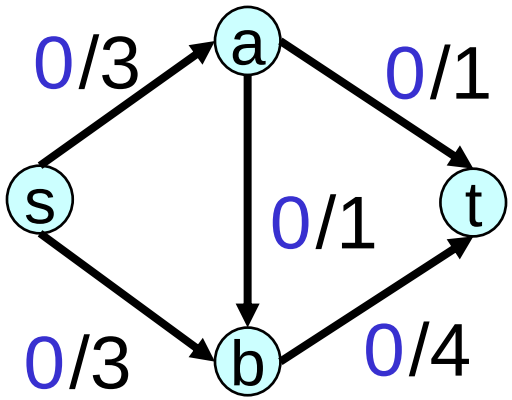
定理２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

定理1の例

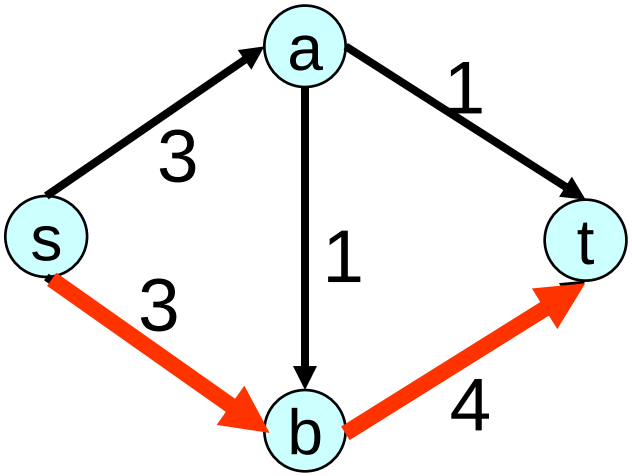
定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

証明：s-t パスを使うことで，実際にフローを増加させることが出来る

与えられた問題と
現在のフローx

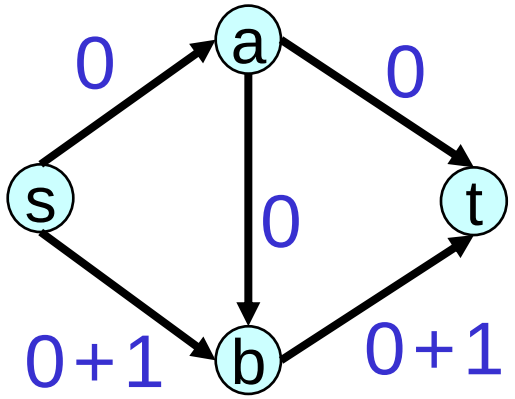


残余ネットワーク



s–t パスが存在

新しいフローx’



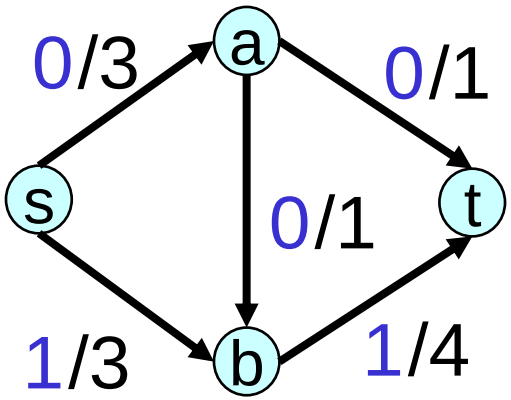
フロー値が
１増えた

定理1の例

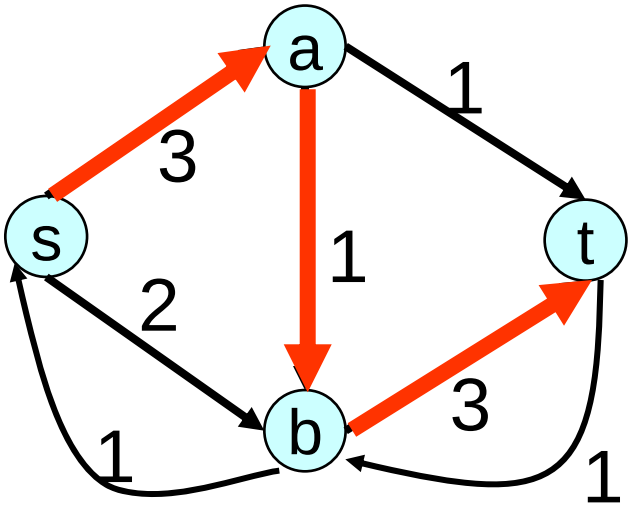
定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

証明：s-t パスを使うことで，実際にフローを増加させることが出来る

与えられた問題と
現在のフローx

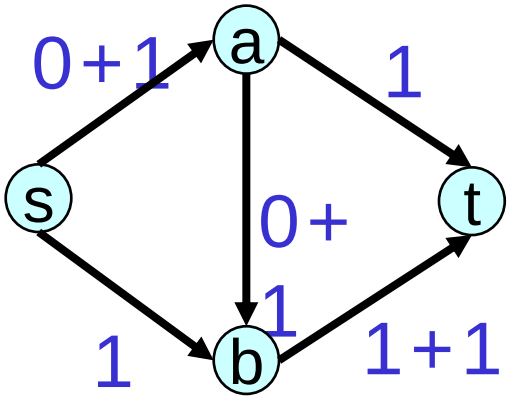


残余ネットワーク



s–t パスが存在

新しいフローx’



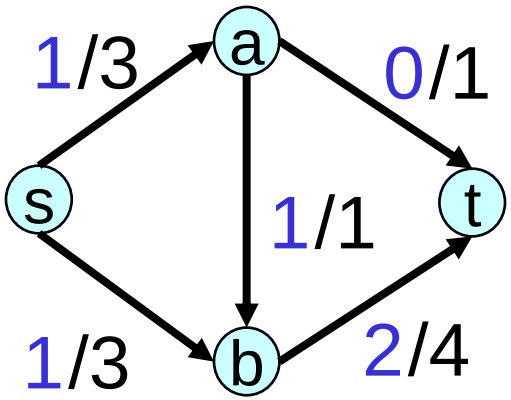
フロー値が
１増えた

定理1の例

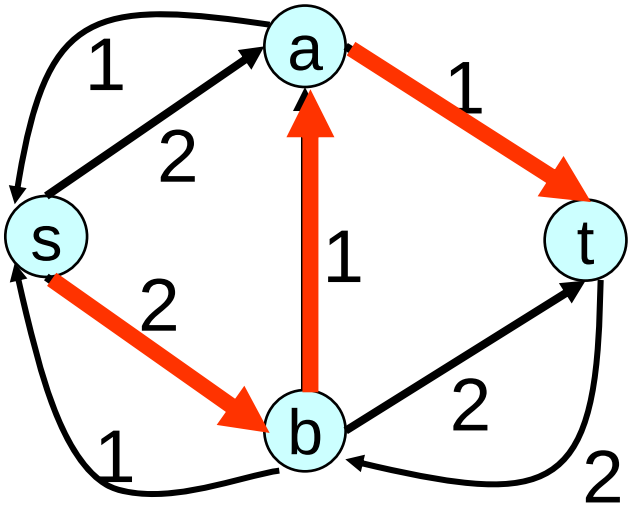
定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

証明：s-t パスを使うことで，実際にフローを増加させることが出来る

与えられた問題と
現在のフローx

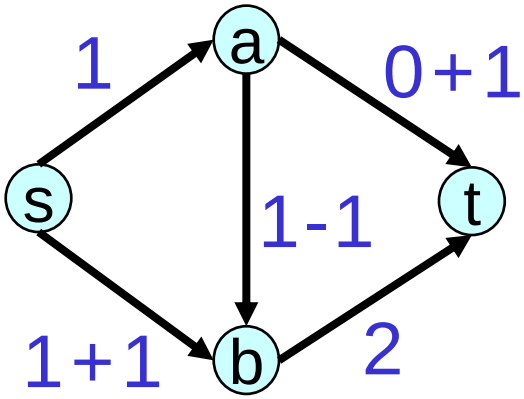


残余ネットワーク



s–t パスが存在

新しいフローx’



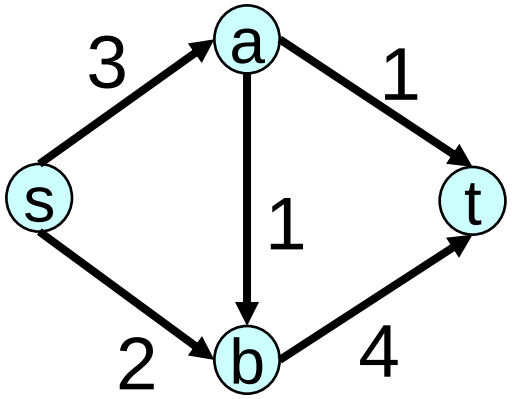
フロー値が
１増えた

定理2の例

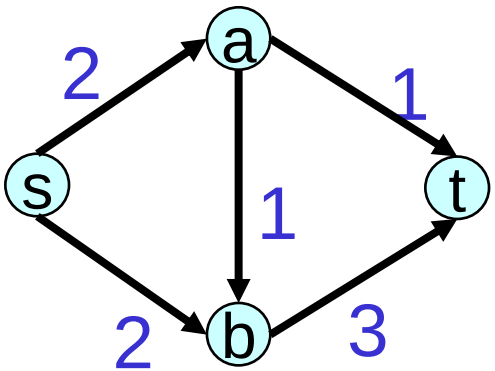
定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

証明は次回

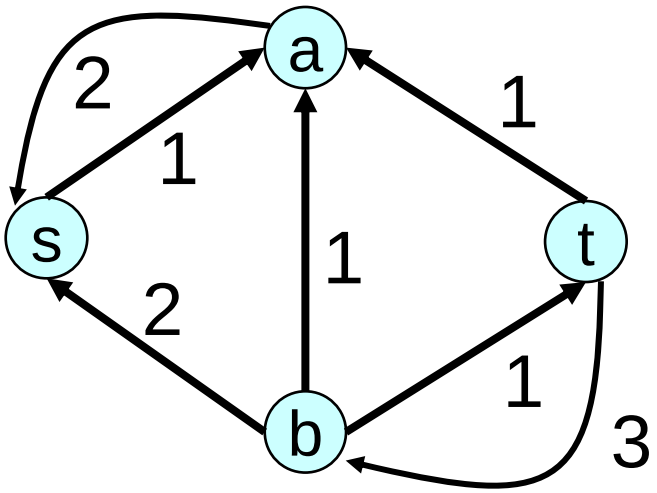
与えられた問題



現在のフロー

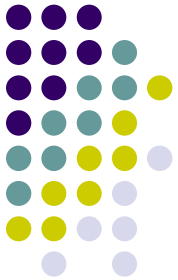


残余ネットワーク



s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

フロー増加法 flow augmenting algorithm



最大フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ０：初期フローとして、全ての枝のフロー量を
０とする

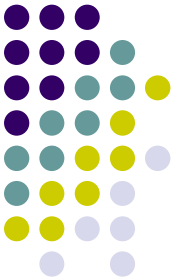
ステップ１：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
⇒ 終了

ステップ３：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、
それを用いて現在のフローを更新する

ステップ４：ステップ1へ戻る

フロー増加法の計算時間



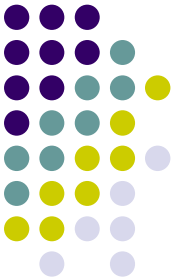
※各枝の容量は整数と仮定
　U = 容量の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

各反復においてフローが1以上増加
➔反復回数 ≦ 最大フロー量 ≦ m U

各反復での計算時間
　＝ 残余ネットワークのs-t パスを求める時間
➔深さ優先探索，幅優先探索などを使うと O(m + n) 時間

∴ 計算時間は O((m+n) m U)
　（入力サイズは m + n + log U なので，指数時間）

フロー増加法の改良



フロー増加法の反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での s-t パスの選び方を工夫する

（改良法１）各反復でのフロー増加量を大きくする
➔各反復で容量最大の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 $O(m \log (n\,U))$，計算時間 $O(m^2 \log (n\,U))$

（改良法2）各反復で最短の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 $O(m\,n)$，計算時間 $O(m^2 n)$

※この他にも，フロー増加法の計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

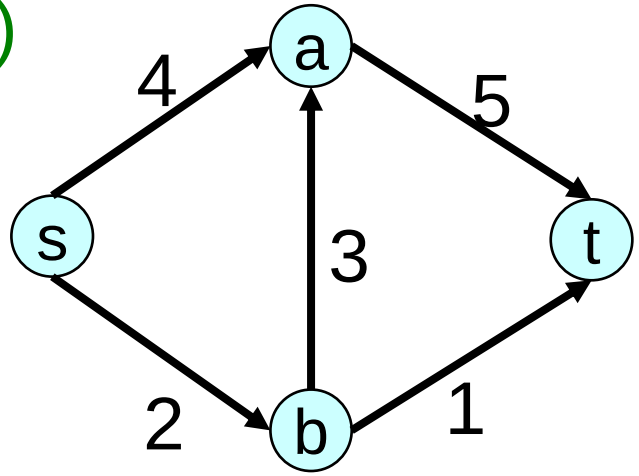
レポート問題

問1：次の2つの最大フロー問題に対する定式化を書きなさい

問2：次の2つの最大フロー問題に対して、フロー増加法で最大フローを求めよ（各反復での残余ネットワークやフローも省略せずに書くこと）

締切：12/9（木）の講義の開始10分後まで

(a)



(b)