

レポート問題 3 番の解答例

問題: 次の LP を単体法で解け.

$$\left\| \begin{array}{ll} \text{最小化} & -5x_1 \quad -4x_2 \quad -3x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 \quad -3x_2 \quad -x_3 \geq -5 \\ & -4x_1 \quad -x_2 \quad -2x_3 \geq -11 \\ & -3x_1 \quad -4x_2 \quad -2x_3 \geq -8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

解答例: 初期辞書は以下のようになる.

$$\begin{array}{rcl} z & = & 0 \quad -5x_1 \quad -4x_2 \quad -3x_3 \\ x_4 & = & 5 \quad -2x_1 \quad -3x_2 \quad -x_3 \\ x_5 & = & 11 \quad -4x_1 \quad -x_2 \quad -2x_3 \\ x_6 & = & 8 \quad -3x_1 \quad -4x_2 \quad -2x_3 \end{array} \quad (1)$$

この辞書の基底解は $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ であり, 許容解である. その目的関数値は 0 である.

最初の反復で基底に入る変数を x_3 とする場合

☆ 辞書 (1) の変形

z に関する式において非基底変数 x_3 の係数は負の値なので, x_3 を基底に入れる変数とする.

制約 $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ より得られる x_3 の上界は $\min\{5, 11/2, 8/2\} = 4$ である.

x_3 を 4 まで増やすと $x_6 = 0$ となるので, 基底変数 x_6 を基底から出す変数とする.

非基底変数 x_3 を基底に入れ, 基底変数 x_6 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は次のようになる:

$$\begin{array}{rcl} z & = & -12 \quad -(1/2)x_1 \quad +2x_2 \quad +(3/2)x_6 \\ x_4 & = & 1 \quad -(1/2)x_1 \quad -x_2 \quad +(1/2)x_6 \\ x_5 & = & 3 \quad -x_1 \quad +3x_2 \quad +x_6 \\ x_3 & = & 4 \quad -(3/2)x_1 \quad -2x_2 \quad -(1/2)x_6 \end{array} \quad (2)$$

この辞書の基底解は $(0, 0, 4, 1, 3, 0)$ であり, その目的関数値は -12 である.

☆ 辞書 (2) の変形

z に関する式において非基底変数 x_1 の係数は負の値なので, x_1 を基底に入れる変数とする.

制約 $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \geq 0$ より得られる x_1 の上界は $\min\{2, 3, 8/3\} = 2$ である.

x_1 を 2 まで増やすと $x_4 = 0$ となるので, 基底変数 x_4 を基底から出す変数とする.

非基底変数 x_1 を基底に入れ, 基底変数 x_4 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は次のようになる:

$$\begin{array}{rcl} z & = & -13 \quad +3x_4 \quad +x_2 \quad +2x_6 \\ x_1 & = & 2 \quad -2x_4 \quad -2x_2 \quad +x_6 \\ x_5 & = & 1 \quad +2x_4 \quad +5x_2 \\ x_3 & = & 1 \quad +3x_4 \quad +x_2 \quad -2x_6 \end{array} \quad (3)$$

この辞書の基底解は $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$ であり, その目的関数値は -13 である.

z に関する式において非基底変数の係数は全て非負の値なので、この解は最適である。

最初の反復で基底に入る変数を x_2 とする場合

☆ 辞書 (1) の変形

z に関する式において非基底変数 x_2 の係数は負の値なので、 x_2 を基底に入れる変数とする。

制約 $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ より得られる x_2 の上界は $\min\{5/3, 11/1, 8/4\} = 5/3$ である。

x_2 を $5/3$ まで増やすと $x_4 = 0$ となるので、基底変数 x_4 を基底から出す変数とする。

非基底変数 x_2 を基底に入れ、基底変数 x_4 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は次のようになる:

$$\begin{aligned} z &= -(20/3) & +(7/3)x_1 & +(4/3)x_4 & -(5/3)x_3 \\ x_2 &= (5/3) & -(2/3)x_1 & -(1/3)x_4 & -(1/3)x_3 \\ x_5 &= (28/3) & -(10/3)x_1 & +(1/3)x_4 & -(5/3)x_3 \\ x_6 &= (4/3) & -(1/3)x_1 & +(4/3)x_4 & -(2/3)x_3 \end{aligned} \tag{4}$$

この辞書の基底解は $(0, 5/3, 0, 0, 28/3, 4/3)$ であり、その目的関数値は $-20/3$ である。

☆ 辞書 (4) の変形

z に関する式において非基底変数 x_3 の係数は負の値なので、 x_3 を基底に入れる変数とする。

制約 $x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ より得られる x_3 の上界は $\min\{5, 28/5, 2\} = 2$ である。

x_3 を 2 まで増やすと $x_6 = 0$ となるので、基底変数 x_6 を基底から出す変数とする。

非基底変数 x_3 を基底に入れ、基底変数 x_6 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は次のようになる:

$$\begin{aligned} z &= -10 & -(3/2)x_1 & -2x_4 & +(5/2)x_6 \\ x_2 &= 1 & -(1/2)x_1 & -x_4 & +(1/2)x_6 \\ x_5 &= 6 & -(5/2)x_1 & -3x_4 & +(5/2)x_6 \\ x_3 &= 2 & -(1/2)x_1 & +2x_4 & -(3/2)x_6 \end{aligned} \tag{5}$$

この辞書の基底解は $(0, 1, 2, 0, 6, 0)$ であり、その目的関数値は -10 である。

☆ 辞書 (5) の変形 — x_1 を基底に入れる変数に選ぶ場合

z に関する式において非基底変数 x_1 の係数は負の値なので、 x_1 を基底に入れる変数とする。

制約 $x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \geq 0$ より得られる x_1 の上界は $\min\{2, 12/5, 4\} = 2$ である。

x_1 を 2 まで増やすと $x_2 = 0$ となるので、基底変数 x_2 を基底から出す変数とする。

非基底変数 x_1 を基底に入れ、基底変数 x_2 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は (3) のようになる。この辞書の基底解は $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$ であり、その目的関数値は -13 である。

z に関する式において非基底変数の係数は全て非負の値なので、この解は最適である。

☆ 辞書 (5) の変形 — x_4 を基底に入れる変数に選ぶ場合

z に関する式において非基底変数 x_1 の係数は負の値なので、 x_1 を基底に入れる変数とする。

制約 $x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \geq 0$ より得られる x_1 の上界は $\min\{2, 12/5, 4\} = 2$ である。

x_1 を 2 まで増やすと $x_2 = 0$ となるので、基底変数 x_2 を基底から出す変数とする。

非基底変数 x_1 を基底に入れ、基底変数 x_2 を基底から出すことにより得られる新しい辞書は (2) のようになる。この辞書の基底解は $(0, 0, 4, 1, 3, 0)$ であり、その目的関数値は -12 である。

次の反復では新しい辞書は (3) のようになり、最適解が得られる。