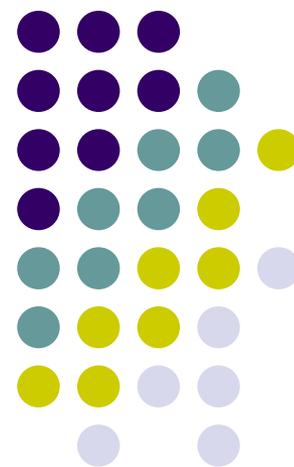


# 数理計画法 第4回

2.3 諸定理

2.4 単体法

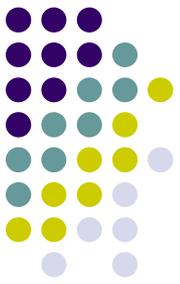


担当： 塩浦昭義

情報科学研究科 徳山・塩浦・全 研究室 准教授

[shioura@dais.is.tohoku.ac.jp](mailto:shioura@dais.is.tohoku.ac.jp)

<http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching>



# 今後の予定

- 11／11 3年生研究室見学会(授業なし)
- 11／18 線形計画5回目
- 11／25 or 12／2 中間試験

# 復習：主問題と双対問題



## 主問題 (primal problem)

## 双対問題 (dual problem)

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

最大化  $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

条件  $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$

...

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$

最大化  $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

条件  $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$

$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$

$-2y_1 - 3y_3 \leq -1$

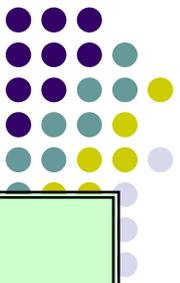
$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

# 復習：弱双対定理



定理2. 2 (弱双対定理)

$x$ : 主問題の許容解,  $y$ : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

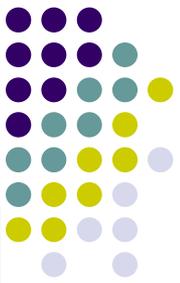
最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$   
条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$   
 $-2x_1 - 4x_3 \geq -4$   
 $4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

許容解(0,1,1)  
目的関数値 -2

最大化  $-4y_1 - 4y_2 - y_3$   
条件  $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$   
 $-2y_1 - 3y_3 \leq -1$   
 $y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$   
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

許容解(1,1,1)  
目的関数値 -9

# 復習：弱双対定理



## 系2.2

$x$ : 主問題の許容解,  $y$ : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

⇒  $x$ : 主問題の最適解、 $y$ : 双対問題の最適解

最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$   
条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$   
 $-2x_1 - 4x_3 \geq -4$   
 $4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

最大化  $-4y_1 - 4y_2 - y_3$   
条件  $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$   
 $-2y_1 - 3y_3 \leq -1$   
 $y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$   
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

許容解(2,0,0)  
目的関数値 -4

許容解(3/5,2/5,0)  
目的関数値 -4

共に最適解

# 復習：双対定理



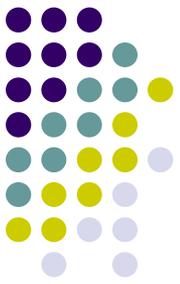
定理2.3:

主問題または双対問題が最適解をもつ

⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

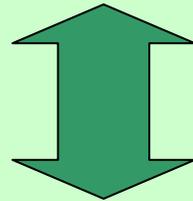
# 相補性定理 (complementarity slackness theorem)



定理 2.4:

$x$ : 主問題の許容解,  $y$ : 双対問題の許容解

$x$ 、 $y$  は最適解



相補性条件  
(complementarity  
slackness condition)

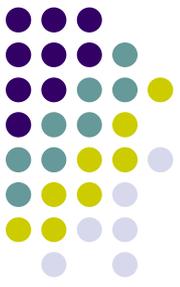
各  $j = 1, \dots, n$  について

$\sum_i a_{ij} y_i \leq c_j$  と  $x_j \geq 0$  のどちらかは等号成立

各  $i = 1, \dots, m$  について

$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$  と  $y_i \geq 0$  のどちらかは等号成立

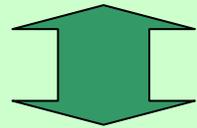
# 相補性定理の証明



**x**: 主問題の許容解

**y**: 双対問題の許容解

**x**、**y** は最適解



$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j \quad \text{または} \quad x_j = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \text{または} \quad y_i = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \dots, m)$$

証明: 弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

**x**、**y**が最適  $\Leftrightarrow$  最初の項 = 最後の項

$$\Leftrightarrow (\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j, (\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i \quad \Leftrightarrow \text{相補性}$$

## 2. 4 単体法(simplex method)

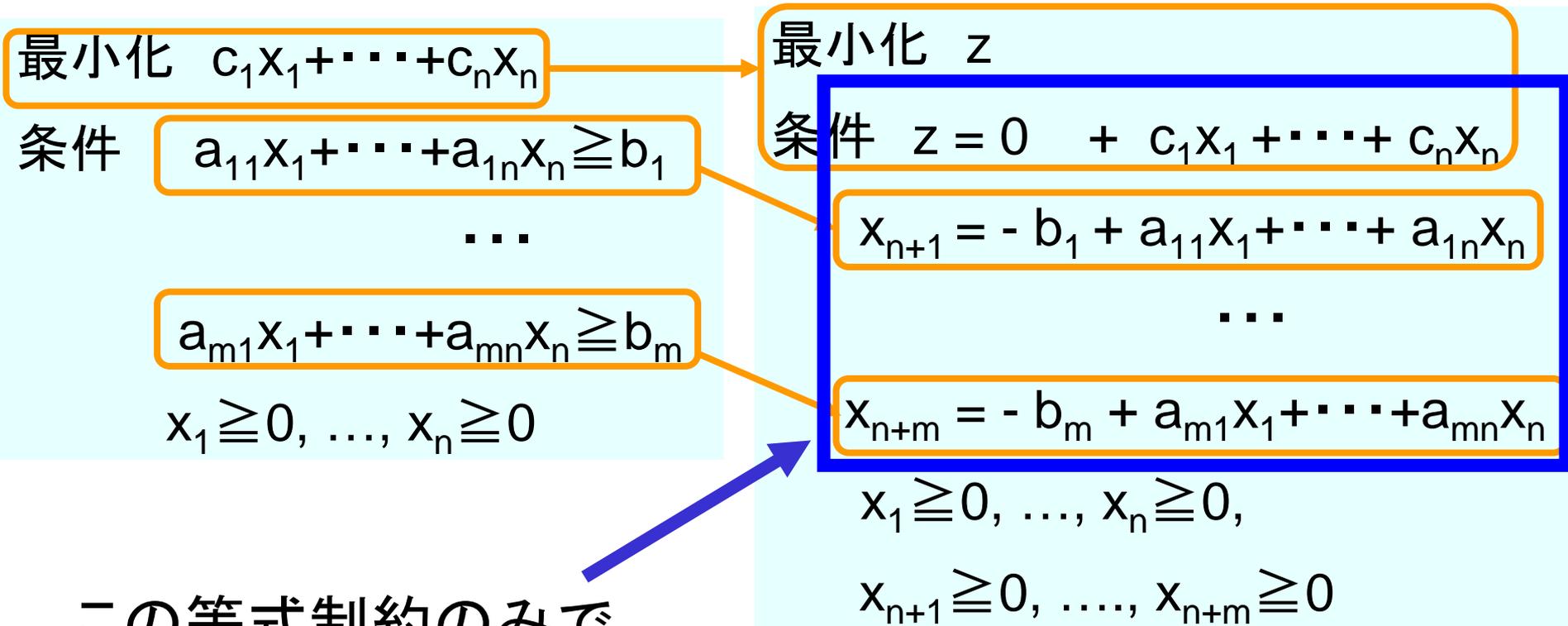
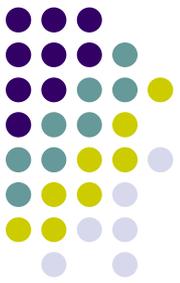


- LPの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

# 辞書(その1)

## 問題の変形

不等式標準形  $\Rightarrow$  一種の等式標準形



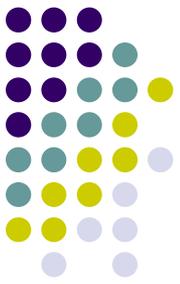
この等式制約のみで

問題を表現できる  $\rightarrow$  辞書(dictionary)

# 辞書(その2)

## 問題の変形

不等式標準形  $\Rightarrow$  一種の等式標準形



最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$   
条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$   
 $-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$   
 $4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

最小化  $z$

条件  $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$   
 $x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$   
 $x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$   
 $x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$   
 $x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0$

辞書

# 辞書に関する用語



$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

非基底変数  
(nonbasic variable)  
右辺の変数

基底変数(basic variable): 左辺に表れる変数

基底解(basic solution): 非基底変数を0としたときの解

(許容とは限らない)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$



基底解は(0,0,0,4,4,1)

# 辞書に関する用語(その2)



許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書

⇔ 基底解の各成分が非負

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, 4, 4)

⇒ 許容辞書

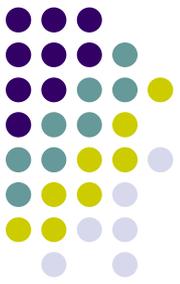
$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, -4, 4)

⇒ 許容辞書ではない



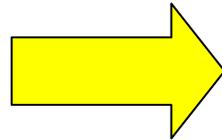
# 辞書の行列表現

辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$



0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

# 基底解の更新方法:ピボット演算



**ピボット演算**(pivot operation): より良い基底解を得るための手順

## 許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値  $z = 0$

解を変化させて  $z$  を減らしたい  
 $\Rightarrow x_1$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_1$  を増やす

$x_1$  を  $\alpha$  だけ増やすと

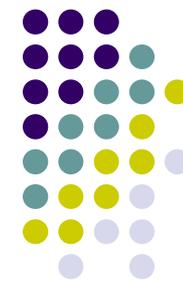
目的関数値  $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4 - 2\alpha, 4 - 2\alpha, 1 + 4\alpha)$

許容性を満たすためには  $\alpha \leq 2$

# ピボット演算(その2)



$$\begin{aligned}z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3\end{aligned}$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$  とすると

解は(2,0,0,0,0,9),  $z = -4$

とくに、基底変数  $x_4 = 4 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底( $x_1, x_5, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_3$ )

$$\begin{aligned}z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 \\x_1 &= 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3 \\x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 \\x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

$x_1$ を基底に入れる

$x_4$ を基底から出す



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

# ピボット演算2回目(その1)



$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

z を減らしたい

⇒  $x_3$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_3$  を増やす

$$x_1 = 2 + (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3$  を  $\alpha$  だけ増やすと

基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$

目的関数値  $z = -4 - 2\alpha$

目的関数値  $z = -4$

解は

$$(2 + (1/2)\alpha, 0, \alpha, 0, 0 - 5\alpha, 9 + 3\alpha)$$

許容性を満たすためには

$$\alpha \leq 0$$

# ピボット演算2回目(その2)



$$\begin{aligned} z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 &= 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3 \\ x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$  とすると  
解は  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$ ,  $z = -4$   
とくに、**基底変数  $x_5 = 0 \rightarrow 0$**



**基底と非基底の入れ替え**

基底( $x_1, x_3, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_5$ )

**$x_3$ を基底に入れる**

**$x_5$ を基底から出す**



**辞書の書き換え**

**(ピボット演算終了)**

$$\begin{aligned} z &= -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

# ピボット演算に関する用語



- 1回目のピボット演算

基底解  $(0, 0, 0, 4, 4, 1) \rightarrow (2, 0, 0, 0, 0, 9)$

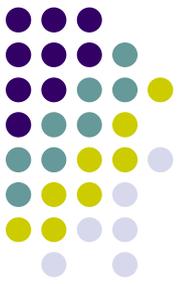
**非退化(nondegenerate)**: 基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9) \rightarrow (2, 0, 0, 0, 0, 9)$

**退化(degenerate)**: 基底解が変化しない

# 最適性の判定



$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

$z$  の式 of 非基底変数の係数がすべて非負



任意の許容解において  $x_4, x_2, x_5$  は非負なので  $z \geq -4$



現在の基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$  は  $z = -4$  なので最適解

# 非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解  $(0, 0, 0, 4, 4, 1)$

目的関数値  $z = 0$

$x_1$  の係数  $= -2 < 0$  なので  
 $x_1$  を増やす  $\Rightarrow z$  が減る

$x_1$  を  $\alpha$  増やすと

解は

$$(\alpha, 0, 0, 4 + 2\alpha, 4 + 2\alpha, 1 + 4\alpha)$$

目的関数値  $z = -2\alpha$

$\alpha$  を任意に増やしても解は許容  
 $\Rightarrow$  非有界



# 単体法の流れ



- 入力: 許容辞書(および基底)
- 出力: 有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

## ステップ1: 最適性判定

$z$  の等式の右辺の係数が全て非負  $\Rightarrow$  最適解  
ある係数が負  $\Rightarrow$  基底に入る変数  $x_s$  にする

## ステップ2: 非有界性判定、ピボット演算

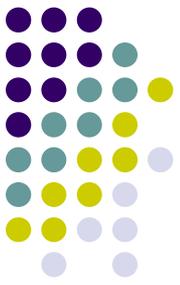
変数  $x_s$  をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる  $\Rightarrow$  非有界

それ以外  $\Rightarrow x_s$  を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数  $x_t$  にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え



# レポート問題 (締切: 11/18)

問1: 右のLPの最適解は $(3/5, 2/5, 0)$ である.

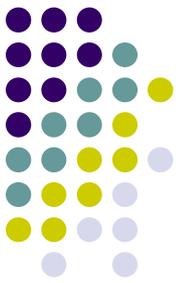
- (1) 双対問題を書きなさい.
- (2) 相補性定理を使って, 双対問題の最適解を求めなさい.

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -3y_1 - 3y_2 - y_3 \\ \text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ & -2y_1 \quad \quad - 3y_3 \leq 0 \\ & \quad y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

問2: 右のLPの最適解は $(2, 0, 0)$ である.

- (1) 双対問題を書きなさい.
- (2) 相補性定理を使って, 双対問題の最適解(の一つ)を求めなさい.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\ & \quad 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$



# レポート問題(締切: 11 / 18)

問3: 右のLP(許容辞書)を単体法により解きなさい.  
単体法の各反復における辞書, および基底から出る  
変数, 入る変数を明記すること

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$