# 数理計画法　第4回

## ２．３　諸定理
## ２．４　単体法

担当：　塩浦昭義
情報科学研究科 徳山・塩浦・全 研究室 准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

# 今後の予定

- １１／１１　3年生研究室見学会（授業なし）
- １１／１８　線形計画5回目
- １１／25 or １2／2 中間試験

# 復習：主問題と双対問題

## 主問題(primal problem)

最小化　$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

## 双対問題(dual problem)

最大化　$b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$

条件　$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

---

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

最大化　$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件　$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0$

# 復習：弱双対定理

定理2．2（弱双対定理）

**x**: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$$
$$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

許容解(0,1,1)
目的関数値 -2

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$$
$$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$$
$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$$
$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

許容解(1,1,1)
目的関数値 -9

# 復習：弱双対定理

系2．2
**x**: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$
条件
$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4 \\ -2x_1 \qquad\quad - 4x_3 &\geqq -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1 \end{aligned}$$
$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$
条件
$$\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\ -2y_1 \qquad\quad - 3y_3 &\leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \end{aligned}$$
$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0$

許容解(2,0,0)
目的関数値 -4

許容解(3/5,2/5,0)
目的関数値 -4

共に最適解

# 復習：双対定理

定理２．３：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

# 相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理2．4：

**x**: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

**x**、**y** は最適解

⇕

各 j = 1, ..., n について

$\Sigma_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\Sigma_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性条件
(complementarity slackness condition)

# 相補性定理の証明

**x**: 主問題の許容解　　　　**y**: 双対問題の許容解

**x**、**y**　は最適解

$$\Updownarrow$$

$\Sigma_i\, a_{ij}\, y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　($\forall$ j = 1, 2, …, n)

$\Sigma_j\, a_{ij}\, x_j = b_i$　または　$y_i = 0$ ($\forall$ i = 1, 2, …, m)

証明:　　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\Sigma_i\, a_{ij}\, y_i) x_j = c_j\, x_j$, $(\Sigma_j\, a_{ij}\, x_j)\, y_i = b_i\, y_i$　⇔　相補性

# ２．４　単体法(simplex method)

- ＬＰの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

# 辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化　$z$

条件　$z = 0 \quad + \ c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　**辞書(dictionary)**

# 辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形 ⇒ 一種の等式標準形

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最小化 $z$

条件

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

# 辞書に関する用語

$$z = 0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$
$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$\cdots$$
$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable)：左辺に表れる変数

基底解(basic solution)：非基底変数を0としたときの解
（許容とは限らない）

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

⇒ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

# 辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary)：

対応する基底解が許容解の辞書

⇔　基底解の各成分が非負

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\qquad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒　許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\qquad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒　許容辞書ではない

# 辞書の行列表現

辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | -2 | -1 | -1 |
| 4 | -2 | -2 | 1 |
| 4 | -2 | 0 | -4 |

# 基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation):より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて $z$ を減らしたい

⇒ $x_1$の係数 < 0 なので

$x_1$ を増やす

$x_1$を$\alpha$だけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには$\alpha \leqq 2$

# ピボット演算（その2）

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$　とすると

解は(2,0,0,0,0,9),　$z = -4$

とくに、 基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底($x_1$, $x_5$, $x_6$), 非基底($x_4$, $x_2$, $x_3$)

$x_1$を基底に入れる

$x_4$を基底から出す

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

# ピボット演算2回目（その1）

$$
\begin{aligned}
z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 \\
x_1 &= 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3 \\
x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 \\
x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

$z$ を減らしたい

⇒ $x_3$の係数 $< 0$ なので

$x_3$ を増やす

$x_3$を$\alpha$だけ増やすと

基底解(2,0,0,0,0,9)

目的関数値 $z = -4$

目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$

解は

$(2 + (½)\alpha, 0, \alpha, 0, \boxed{0 - 5\alpha}, 9 + 3\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 0$

# ピボット演算2回目(その2)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底($x_1$, $x_3$, $x_6$), 非基底($x_4$, $x_2$, $x_5$)

$x_3$を基底に入れる

$x_5$を基底から出す

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

# ピボット演算に関する用語

- 1回目のピボット演算

  基底解　(0,0,0,4,4,1)　→　(2,0,0,0,0,9)

  **非退化(nondegenerate)**：基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

  基底解　(2,0,0,0,0,9)　→　(2,0,0,0,0,9)

  **退化(degenerate)**：基底解が変化しない

# 最適性の判定

$$z = -4 \boxed{+ (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5}$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

↓

任意の許容解において $x_4$, $x_2$, $x_5$ は非負なので $z \geqq -4$

↓

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は z = -4 なので最適解

# 非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

$x_1$の係数 = -2 < 0 なので

$x_1$ を増やす ⇒ $z$ が減る

$x_1$を$\alpha$増やすと

解は

$(\alpha, 0, 0, 4+2\alpha, 4+2\alpha, 1+4\alpha)$

目的関数値 $z = -2\alpha$

$\alpha$を任意に増やしても解は許容

⇒ 非有界

# 単体法の流れ

- 入力：許容辞書（および基底）
- 出力：有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1：最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 $x_s$ にする

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数 $x_s$ をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒$x_s$ を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数 $x_t$ にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

# レポート問題（締切：11／18）

問1：右のLPの最適解は(3/5,2/5,0)である.

(1) 双対問題を書きなさい.

(2) 相補性定理を使って，双対問題の最適解を求めなさい.

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -3y_1 - 3y_2 - y_3 \\
\text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\
 & -2y_1 \qquad\quad - 3y_3 \leqq 0 \\
 & \;\; y_1 - 4y_2 + \;\; y_3 \leqq -1 \\
 & y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0
\end{array}
$$

問2：右のLPの最適解は(2,0,0)である.

(1) 双対問題を書きなさい.

(2) 相補性定理を使って，双対問題の最適解（の一つ）を求めなさい.

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -2x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4 \\
 & -2x_1 \qquad\quad - 4x_3 \geqq -4 \\
 & \;\; 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq 2 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0
\end{array}
$$

# レポート問題（締切：11／18）

問3：右のLP（許容辞書）を単体法により解きなさい.

単体法の各反復における辞書，および基底から出る変数，入る変数を明記すること

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$