

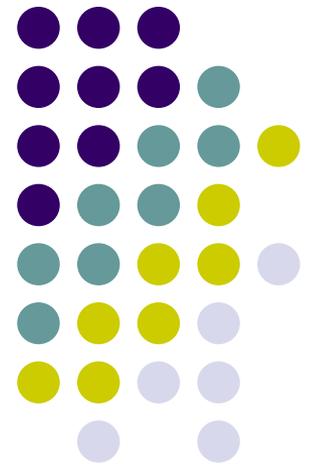
数理計画法 第3回

2.3 諸定理

担当： 塩浦昭義 Akiyoshi Shioura

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



復習：主問題と双対問題



主問題 (primal problem)

双対問題 (dual problem)

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

最大化 $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

条件 $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$

...

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

主問題の i 番目の **不等式**

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$



双対問題の i 番目の **変数**

$y_j \geq 0$

主問題の j 番目の **変数**

$x_j \geq 0$



双対問題の j 番目の **不等式**

$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j$

実行可能, 実行不可能



定義: 不等式標準形のLPに対し

- **実行可能(feasible)** \Leftrightarrow 許容解が存在する
- **実行不可能(infeasible)** \Leftrightarrow 許容解が存在しない

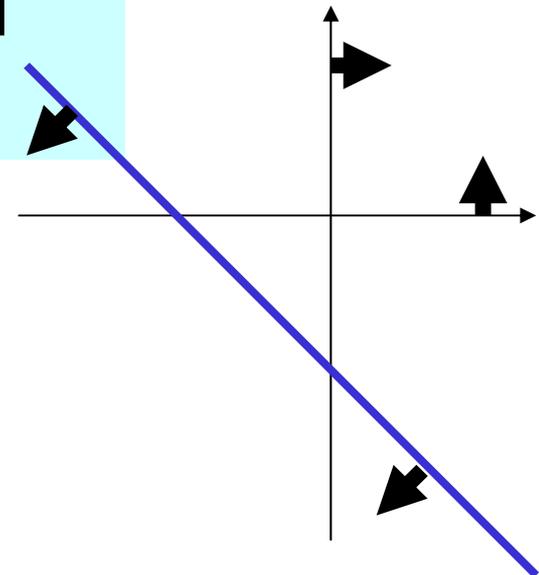
最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq -3$
 $x, y \geq 0$

実行可能

(1, 1)は許容解

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq 1$
 $x, y \geq 0$

実行不可能





有界, 非有界

定義: 実行可能なLPは (最小化の場合)

- 有界(bounded)
⇔ 任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded) ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geq -3$
 $x, y \geq 0$

有界

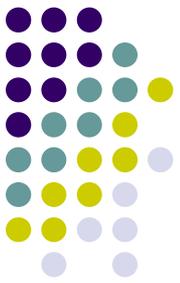
目的関数値 ≥ 0

最小化 $-x - y$
条件 $x + y \geq 0$
 $x, y \geq 0$

非有界

任意の $\alpha > 0$ に対し (α, α) は許容解
目的関数値 $= -2\alpha$

LPの基本定理



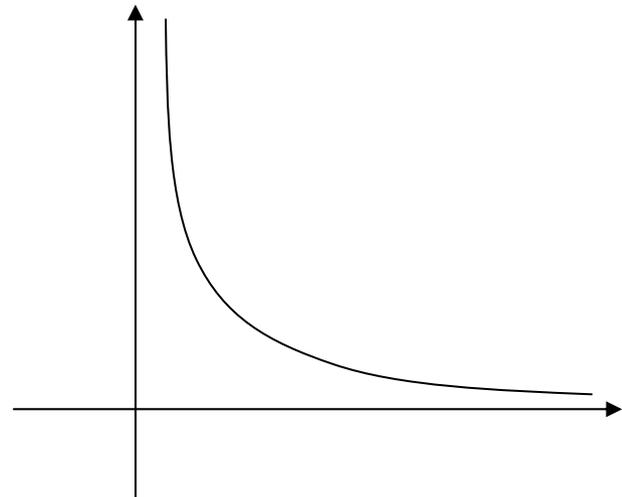
定理2. 1 (基本定理, fundamental theorem)
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界 \Rightarrow **最適解**が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない!

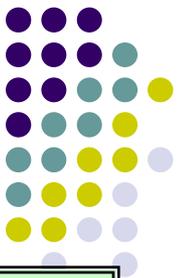
最小化 y
条件 $xy \geq 1$
 $x, y \geq 0$

最適値 = 0

でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理



定理2. 2 (弱双対定理, weak duality theorem):

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明



シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

最小化 $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

条件 $a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$

$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2$

...

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最大化 $b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$

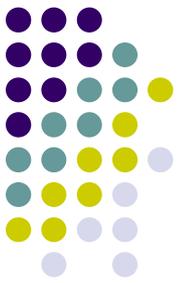
条件 $a_{11} y_1 + \dots + a_{m1} y_m \leq c_1$

$a_{12} y_1 + \dots + a_{m2} y_m \leq c_2$

...

$a_{1n} y_1 + \dots + a_{mn} y_n \leq c_n$

$y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$



弱双対定理の系

系2. 1

主問題が**非有界** \Rightarrow 双対問題は**実行不可能**

双対問題が**非有界** \Rightarrow 主問題は**実行不可能**

証明: 対偶（双対: 実行可能 \Rightarrow 主: 有界）を示す

双対問題が実行可能と仮定

y : 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$$\sum c_j x_j \geq \alpha \quad \therefore \text{主問題は有界}$$

弱双対定理の系



系2. 2

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

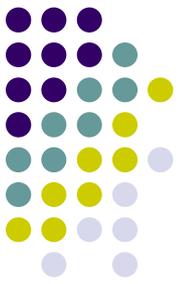
$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

⇒ \mathbf{x} : 主問題の最適解、 \mathbf{y} : 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理2. 2)を使って証明すること

弱双対定理の系



例2.3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$

$$-2y_1 \quad - 3y_3 \leq -1$$

$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

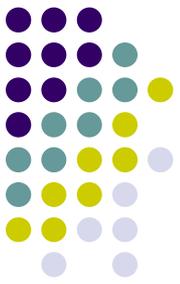
$x = (2, 0, 0)$: 許容解

$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒ 系2.2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理



定理2.3 (双対定理, duality theorem) :
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

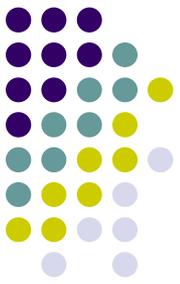
証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ



			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ (双対定理)	× (系2. 1)	× (双対定理)
		非有界	× (系2. 1)	× (系2. 1)	○ (系2. 1)
	実行不可能	× (双対定理)	○ (系2. 1)	○	

レポート問題



問1: 系2.2を証明せよ.

問2: 次のような線形計画問題の例を示せ.

- (1) 主問題, 双対問題共に最適解をもつ
- (2) 主問題は非有界, 双対問題は実行不可能

問3: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \geq -3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

締め切り 11月4日(木) ※来週10月28日は休講です