数理計画法　第2回

２．１　線形計画問題と
　　　　その標準形
２．２　双対問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/mp09/

今日の講義の流れ

線形計画問題に関する用語と定理

- 不等式標準系，等式標準系
- 双対問題
- LPの諸定理

2. 線形計画
2．1　線形計画問題とその標準形

線形計画問題（Linear Programming Problem）の定義

- 目的関数(objective function)が線形
- 制約(constraint)が線形

という最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　
$$
\begin{aligned}
5x \qquad\quad + 3z &\leqq 8 \\
2z &= 2 \\
4y + \quad z &\geqq 9 \\
x, y &\geqq 0
\end{aligned}
$$

制約式は「≧」「＝」「≦」
どれでもよい
（「＞」「＜」は不可）

変数は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

LPの不等式標準形

任意の形のLPを
扱うのは面倒
⇒　不等式標準形
（inequality standard form）

- ◆目的は最小化 (minimization)
- ◆制約式は不等式(inequality)
  「左辺≧右辺」の形
- ◆各変数は非負(nonnegative)

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

不等式標準形への変形

命題2．1：任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

【目的関数の－1倍】 最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \text{最小化} \quad -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約の－1倍】 不等式を "≦" から "≧" へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \Longrightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge -b$$

不等式標準形への変形

【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

x_j（非負制約なし） ⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

不等式標準形への変形の例

最大化 $3x + 2y$

条件 $x + y = 1$

$x \geqq 0$

最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) \leqq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟹ $x_j = x_{j1} - x_{j2}$, $x_{j1} \geqq 0$, $x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⟹ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし$s_{j1} = s_j$, $s_{j2} = 0$（$s_j \geqq 0$ のとき）

$s_{j1} = 0$, $s_{j2} = - s_j$（$s_j < 0$ のとき）

例：$(x, y) = (3, -2)$ は　$x + y = 1$, $x \geqq 0$ を満たす

⇒ $(x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1$, $x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟹ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⟹ $(t_1, \ldots, t_{j1} - t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

例：$(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x,\ y_1,\ y_2 \geqq 0$ を満たす

$\Rightarrow (x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は $x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

等式標準形

- LPの**等式標準形**

(equality standard form)

◆目的は**最小化**

◆制約は**等式**(equation)

◆各変数は**非負**

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

等式標準形への変形

命題2．2：任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる（命題2．1）
- 不等式「左辺≧右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数 x_{n+i} を利用

（スラック変数, slack variable）

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

$\Longrightarrow$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0$

双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい
（最適値の下界値の計算）

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$ ②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

制約を足し合わせてみる

- 目的関数≧②×3＋③＝ $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geqq -13$
- 目的関数≧①×0.5＋②×0.5＝ $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geqq -4$

より良い下界

双対問題

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$　①

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$　②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$　③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

より一般に，非負実数

y_1, y_2, y_3 を使うと

①×y_1＋②×y_2＋③×y_3

左辺：$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$

右辺：$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\ -2y_1 - 3y_3 &\leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \end{aligned}\right\}$$

が成り立つならば

目的関数≧左辺≧右辺

$= -4y_1 - 4y_2 - y_3$

双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなLP

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\ & -2y_1 \qquad\quad - 3y_3 \leqq -1 \\ & \quad y_1 - 4y_2 + \ y_3 \leqq -1 \\ & y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0 \end{array}$$

もとの問題に対する
双対問題
(dual problem)

もとの問題・・・・主問題 (primal problem)

主問題と双対問題

主問題	双対問題
最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$	最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$
条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$	条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$	$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$
$\cdots$	$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$	$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$	$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

行列表現

主問題	双対問題
最小化　$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	最大化　$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
条件　$A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}$	条件　$A^T\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$

主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順（１）双対問題を不等式標準形に書き換え

（２）書き換えた問題の双対問題をつくる

（３）得られた双対問題を変換すると

もとの問題に一致することを確かめる．

等式標準形の双対問題

- LPの等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,..,m) \\
&\qquad\quad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

不等式標準形に変換

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i \quad (i = 1,2,..,m) \\
&\qquad\quad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

等式標準形の双対問題

双対問題をつくる

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i''$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i'' \le c_j \quad (j = 1, 2, .., n)$

$y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0 \quad (i = 1, 2, ..., m)$

$y_i' - y_i''$ を非負制約なし変数 y_i に置き換え

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j = 1, 2, .., n)$

等式標準形のLPに対する双対問題

諸定理 ― LPの基本定理

定義：LPに対し

- 実行可能(feasible)⇔許容解(feasible solution)が存在する
- 実行不可能(infeasible)⇔許容解が存在しない

最小化　$x + 2y$

条件　$-x - y \geqq -3$

$x, y \geqq 0$

実行可能

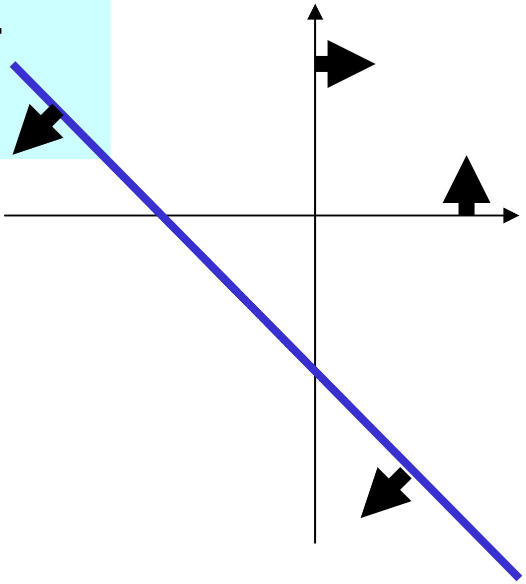
（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$

条件　$-x - y \geqq 1$

$x, y \geqq 0$

実行不可能



レポート問題（締切：10/21（木））

問１：次の問題を線形計画問題として定式化しなさい．

あるジュース製造会社では，A，B，Cの３つの町に工場兼配送センターをもっていて，W，X，Y，Zの４つの店舗にジュースを配送する必要がある．各工場が供給可能なジュース量，および各店舗が必要なジュース量は以下の通りである．また，各工場から店舗に1単位のジュースを運ぶ際に必要な費用は以下の通りである（単位は万円）．

このとき，需要と供給に関する条件を満たし，かつ輸送費用を最小にする輸送計画を求めよ．

	店W	店X	店Y	店Z	供給量
A市	55	30	40	50	50
B市	35	30	80	45	30
C市	70	20	90	35	30
需要量	25	30	40	15	

レポート問題（締切：10/21（木））

問2：

(1) 下記の線形計画問題の許容解領域を図示し，
最適解を求めなさい．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 3x_1 + 6x_2 \\
\text{条件} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1 + 4x_2 \geq 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(2) 上記の線形計画問題の双対問題を求めなさい．

(3) 双対問題の許容解領域を図示し，最適解を求めなさい．

問3：双対問題の双対問題は主問題に一致する事を証明せよ．