数理計画法 第1回

1. 数理計画問題
2. 線形計画

担当：　塩浦昭義
情報科学研究科 徳山・塩浦・全 研究室 准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

「数理計画法」の授業の目的

- 数理計画問題、およびその解法について学ぶ

使用する教科書

☆田村明久、村松正和著

「最適化法」、工系数学講座17巻

共立出版、2002年

☆適宜資料を配布

教科書を生協で購入しておいてください

成績評価の方法および基準

- 中間試験(50点)
- 期末試験(50点）
- 演習レポートの提出状況(最大20点程度)
により評価

- 60点以上で合格
- 出席点は全く考慮しない
- レポート未提出者は試験の受験は不可

レポートの
提出時間は
13:10まで
それ以降は
0点扱い

授業に関する情報のページ
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/

単位が不可となる条件

- 線形計画に関するレポートを一度も提出しない
- 中間試験の得点が25点未満
  - （レポートの提出状況が悪い場合）30点未満
- ネットワーク計画，非線形計画に関するレポートを一度も提出しない
- 期末試験の得点が25点未満
  - （レポートの提出状況が悪い場合）30点未満

以上の条件のいずれかに
該当する場合は単位が不可

今後の予定

- 10／14 線形計画2回目
- 10／21 線形計画3回目
- 10／28 出張のため休講（予定）
- 11／4 線形計画4回目

- 11月中旬～下旬 中間試験（予定）

数理計画問題とは？

- 狭義には

数理（数学）を使って
計画を立てるための問題

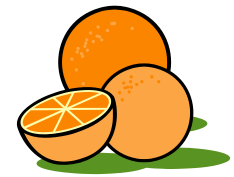
- 広義には

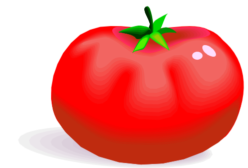
与えられた評価尺度に関して
最も良い解を求める問題
（最適化問題）

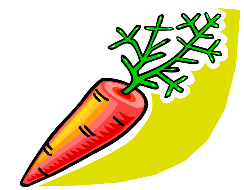
例1：飲料会社のジュース生産計画

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい
- 資源　ー　オレンジ、にんじん、トマト
- 生産するジュース

  ー　オレンジ100、トマト100、ミックス



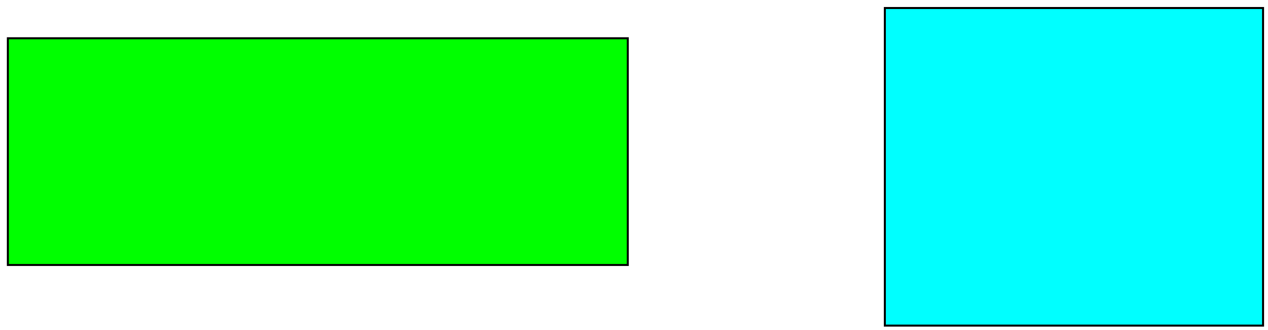




種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

例2：長方形の問題

- 面積が１以上の長方形を描く



- 外周の長さを最小にするには？

数理計画問題の解き方

- 問題を数式を使って数学的に表現
  （定式化)
- 定式化された問題にアルゴリズムを適用、
  答えを求める

この授業の内容

数理計画問題を解く様々なアルゴリズムの説明

例1の定式化

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

•各ジュースの生産量を変数で表現

x:オレンジ100の生産量

y:トマト100の生産量

z:ミックスの生産量

例1の定式化(続き)

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

最大化 $2x + 2y + 3z$

収益を最大に

条件

$$5x + 3z \leqq 8$$

使用できるオレンジの量は8以下

$$2z \leqq 2$$

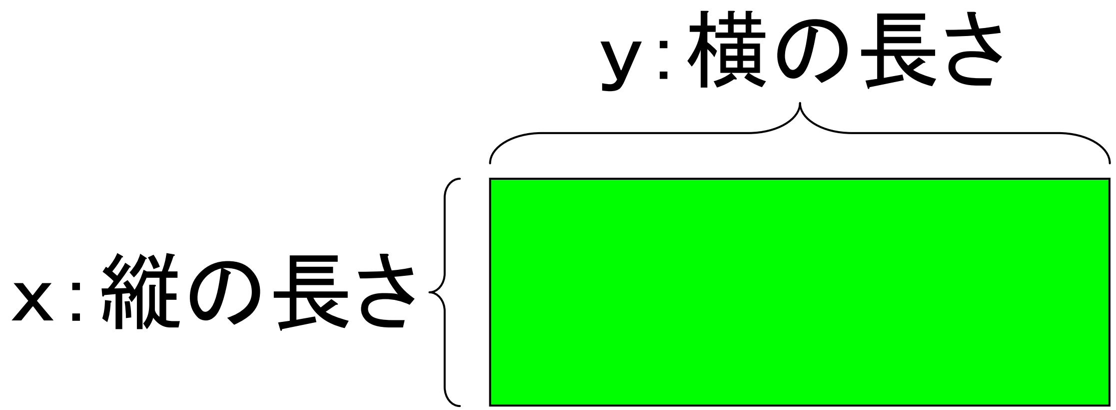
$$4y + z \leqq 9$$

$$x, y, z \geqq 0$$

各ジュースの生産量は非負

例2の定式化

- 面積が1以上の長方形を描く
- 外周の長さを最小にするには？



最小化　$2x + 2y$ ― 外周の長さを最小に

条件　$xy \geqq 1$ ― 面積は1以上

$x, y \geqq 0$ ― 縦横の長さは非負

線形計画問題、非線形計画問題

例1：

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　$5x + 3z \leqq 8$

$2z \leqq 2$

$4y + z \leqq 9$

$x, y, z \geqq 0$

すべて線形の等式、不等式で表現されている

⇒ 線形計画問題

例2：

最小化　$2x + 2y$

条件　$xy \geqq 1$

$x, y \geqq 0$

非線形の式が使われている

⇒ 非線形計画問題

整数計画問題

例１の変種:

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　$5x + 3z \leqq 8$

$2z \leqq 2$

$4y + z \leqq 9$

$x, y, z \geqq 0$

x, y, z は整数

変数に整数制約が付加される

⟹ 整数計画問題

数理計画問題に関する用語

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　$5x + 3z \leqq 8$

$2z \leqq 2$

$4y + z \leqq 9$

$x, y, z \geqq 0$

目的関数:最小化または最大化される関数

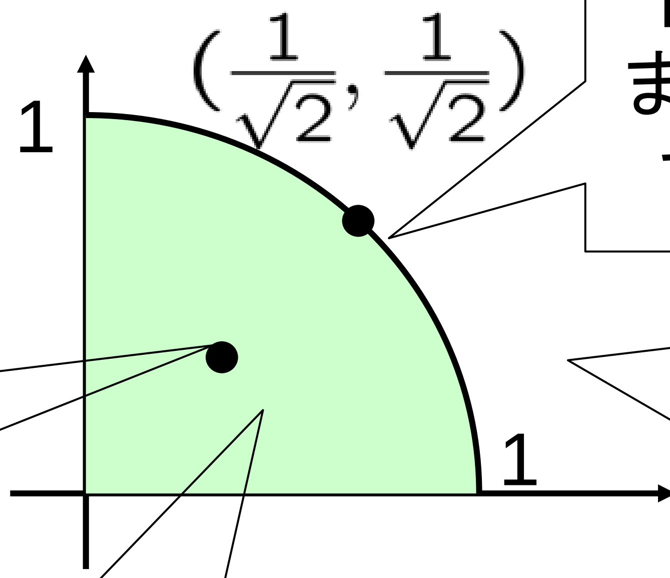
制約式:問題の中の条件式

数理計画問題に関する用語(続き)

最大化　$x + y$

条件　$x^2 + y^2 \leqq 1$

$x, y \geqq 0$



最適解: 目的関数を最大または最小にする許容解

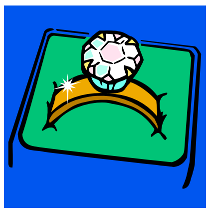
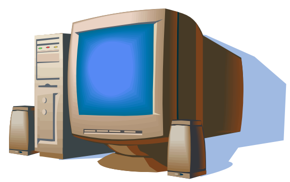
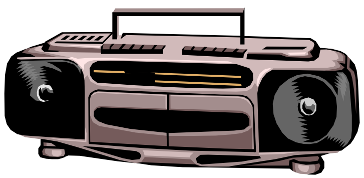
許容解: 制約式をすべて満たすベクトル (x, y)

最適値: 最適解の目的関数値

許容解領域: 許容解すべての集まり

整数計画の例1：ナップサック問題

- ナップサックにものを詰め込む

			
500g	10kg	1kg	5kg
10万	15万	5千	1万

- ナップサックの重量制限（10kg）を越えてはならない
- 総価値を最大にしたい

整数計画の例1：ナップサック問題

定式化ー各アイテムに変数を割り当て

宝石を選んだら$w = 1$，選ばなかったら$w = 0$

選んだアイテムの総価値

最大化 $10w + 15x + 0.5y + z$

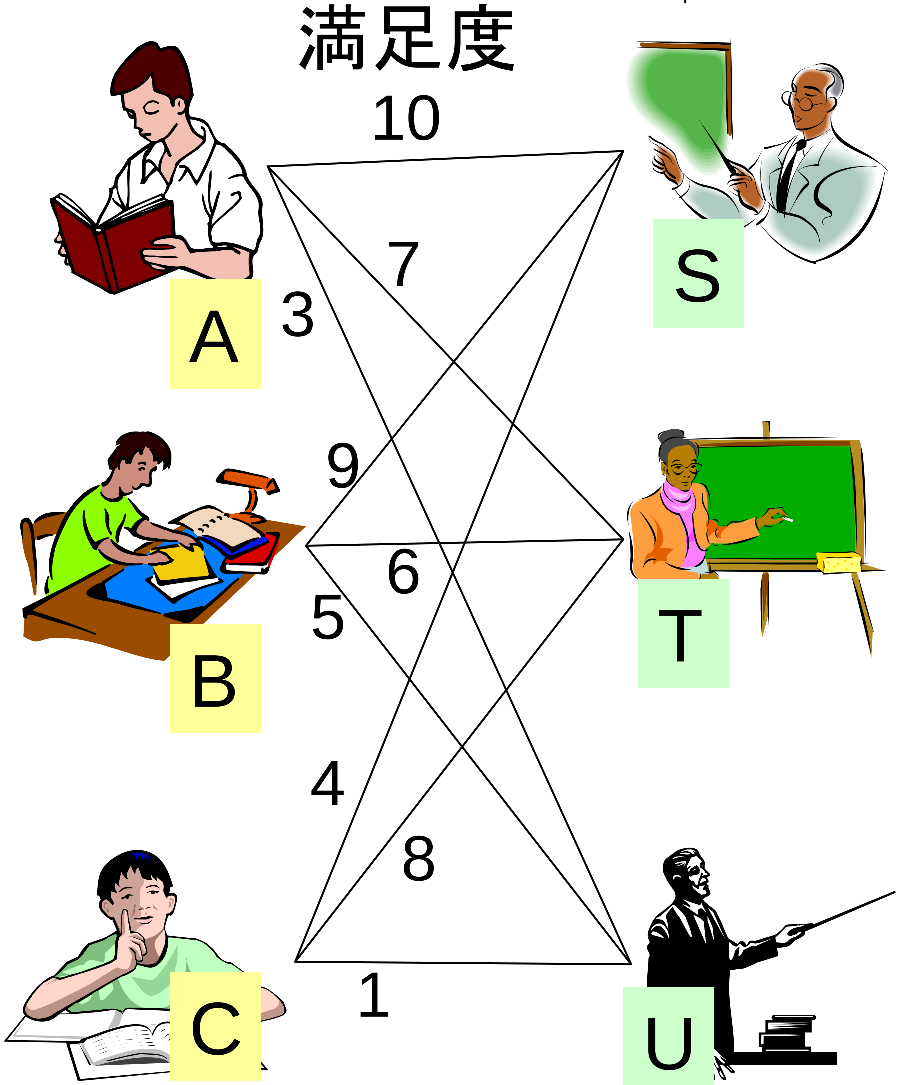
条件 $0.5w + 10x + y + 5z \leqq 10$

w, x, y, z は 0 または 1

選んだアイテムの総重量

整数計画の例2：研究室配属

- 各研究室に学生一人を割り当てる
- 学生の満足度の合計を最大にしたい



整数計画の例2:研究室配属

定式化

学生と先生のペアに変数を

割り当て

$x_{AS}, x_{AT}, x_{AU}, x_{BS}, \ldots$

A を S に割当てたら $x_{AS} = 1$

割り当てなければ $x_{AS} = 0$

最大化 $10x_{AS} + 7x_{AT} + 3x_{AU} + \ldots$

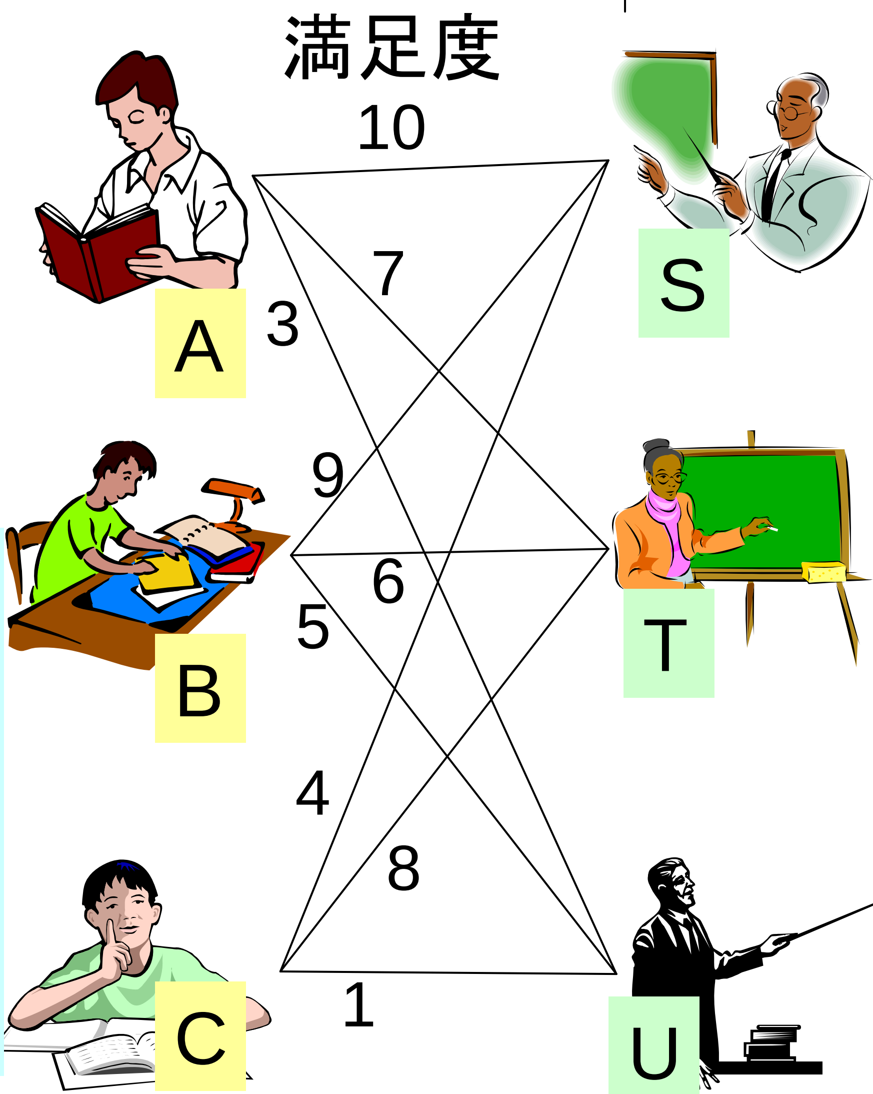
条件 $x_{AS} + x_{AT} + x_{AU} = 1$

$\ldots$

$x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} = 1$

$\ldots$

各変数は 0 または 1

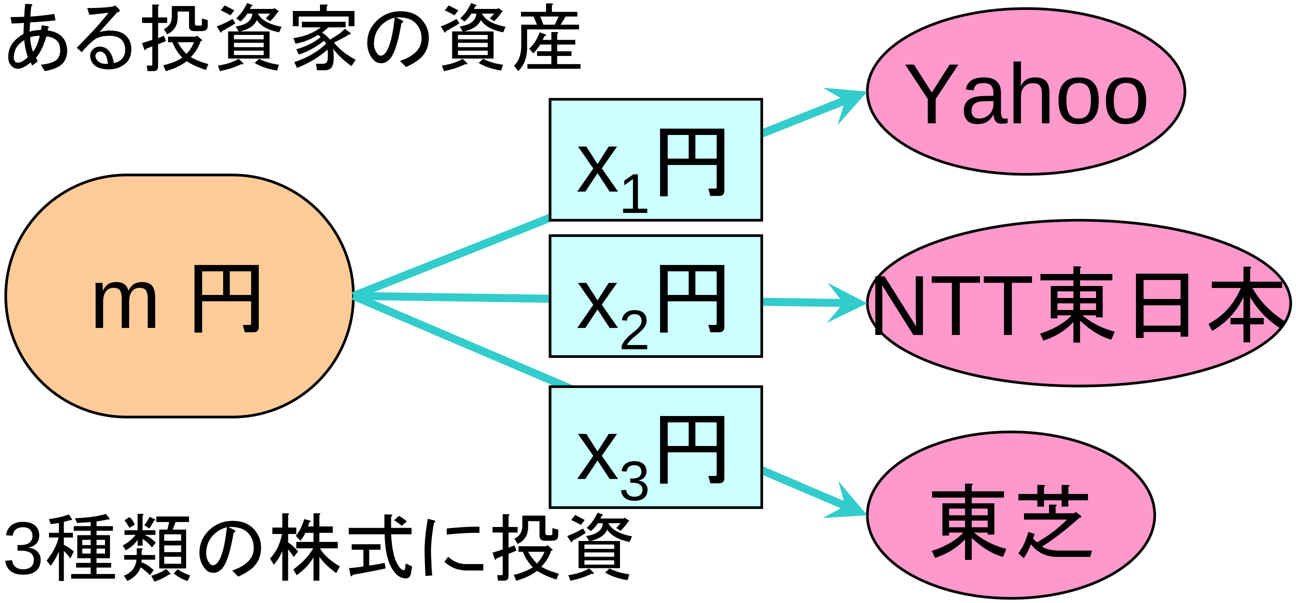


非線形計画の例1：ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオ：株式などの金融資産を組み合わせたもの

投資家が最も満足する投資方法を求めたい

ある投資家の資産



3種類の株式に投資

それぞれ

現在の価格 p_i

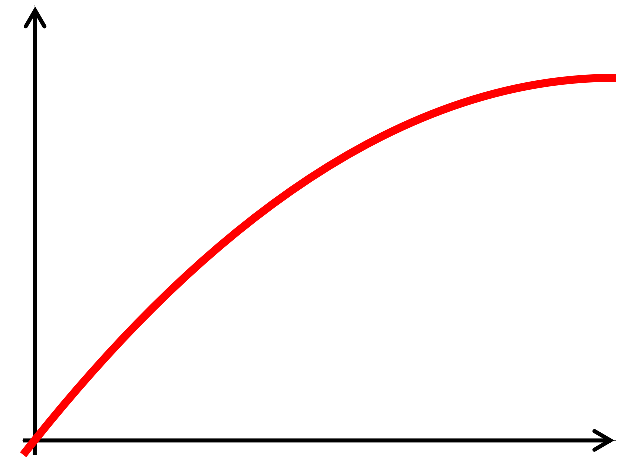
来月の価格 Q_i

（確率変数）

1ヵ月後の資産： $M = \dfrac{Q_1 x_1}{p_1} + \dfrac{Q_2 x_2}{p_2} + \dfrac{Q_3 x_3}{p_3}$ （確率変数）

非線形計画の例1：
ポートフォリオ選択問題

来月の資産Mに対する満足度：$U(M) = M - \beta M^2$



U(M)の期待値を最大にしたい

$$E[U(M)] = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \beta \left[\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]^2$$

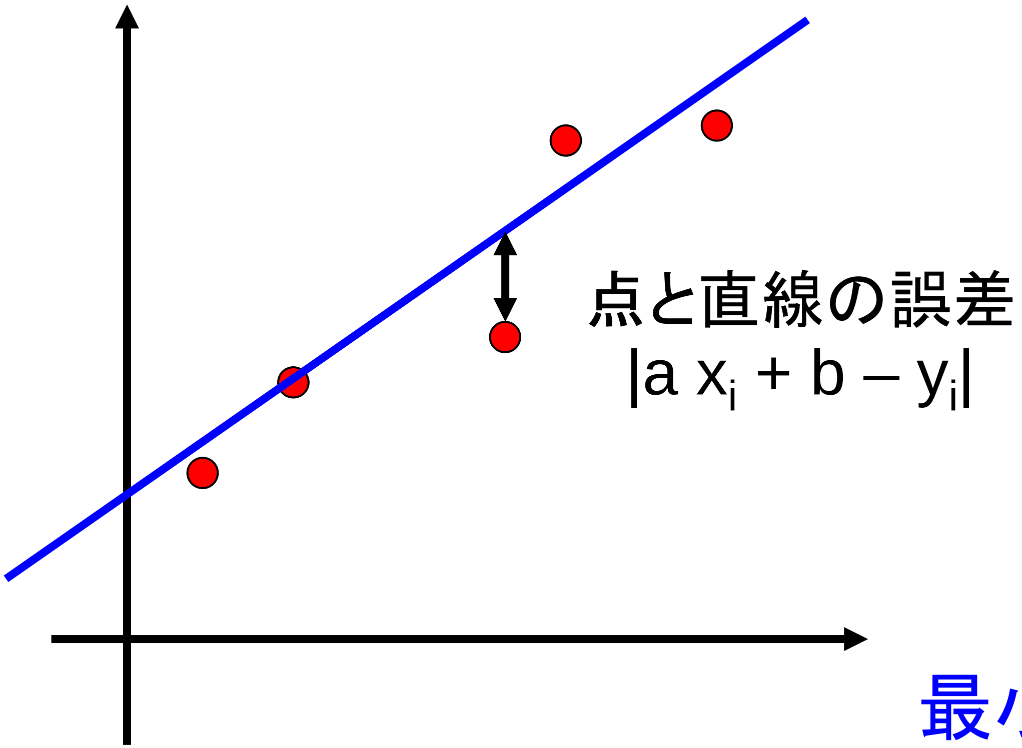
$$- \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

r_i は Q_i/p_i の平均
σ_{ij} は
$(Q_i/p_i - r_i)(Q_j/p_j - r_j)$
の共分散

条件： $x_1 + x_2 + x_3 = m, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

非線形計画の例2: 最小二乗問題

実験データ (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が得られた
➔直線 $y = ax + b$ で近似したい



点と直線の誤差の二乗和を最小にしたい

最小化 $\Sigma_{i=1}^{n} (a\,x_i + b - y_i)^2$

２．線形計画
２．１　線形計画問題とその標準形

線形計画問題（LP）の定義

- 目的関数が線形関数，制約式も線形式の最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　$5x + 3z \leqq 8$

$2z = 2$

$4y + z \geqq 9$

$x, y \geqq 0$

制約式は「≧」「＝」「≦」
どれでもよい

制約式は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

LPの不等式標準形

任意の形のLPを扱うのは面倒
⇒ 不等式標準形

- ◆目的は最小化
- ◆制約式は「左辺≧右辺」の形
- ◆各変数は非負

最小化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

不等式標準形への変形

命題2．1：任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

【目的関数の－1倍】 最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longrightarrow \quad \text{最小化} \quad -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約の－1倍】 不等式を “≦” から “≧” へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \quad \Longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge -b$$

不等式標準形への変形

【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

x_j（非負制約なし） ⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2}$, $x_{j1} \geqq 0$, $x_{j2} \geqq 0$

不等式標準形への変形の例

最大化 $3x + 2y$

条件 $x + y = 1$

$x \geqq 0$

最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) \leqq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟶ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1 変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⟶ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし$s_{j1} = s_j,\ s_{j2} = 0$（$s_j \geqq 0$ のとき）

$s_{j1} = 0,\ s_{j2} = -s_j$（$s_j < 0$ のとき）

例：$(x, y) = (3, -2)$ は $x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

⇒ $(x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟹ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⟹ $(t_1, \ldots, t_{j1} - t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

例：$(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす
$\Rightarrow (x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は $x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす