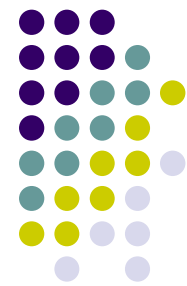


レポート問題の解答例

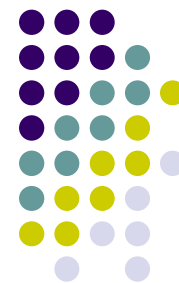


問題 1: 関数 f_1, f_2 に対し, $x = (1, 2)$ における2次のテイラー近似を求めなさい.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1 \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

(1,2)における関数値, 勾配ベクトル, ヘッセ行列を具体的に計算し, 2次のテイラー近似の式に代入すれば求められる

レポート問題の解答例



問題2：関数 $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$

について次の問題を解きなさい。

(a) 勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ。

(b) 原点(0,0)が極小解か否か，最適性条件を用いて判定せよ。

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 2 + e^{x+y} \\ -x + 4y + e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + e^{x+y} & -1 + e^{x+y} \\ -1 + e^{x+y} & 4 + e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = (0, 0) \text{ のとき } \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって(0,0)は停留点ではないので，極小解でもない

レポート問題の解答例



問題2 : 関数 $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$

について次の問題を解きなさい.

(c) 関数 f から最後の項 e^{x+y} を削除したときの f に対し, すべての停留点を求めよ. さらに, 極小点, 極大点, 鞍点のいずれであるか, 2次の最適性条件を用いて判定せよ.

$g(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x$ とおくと,

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 2 \\ -x + 4y \end{pmatrix} \quad Hg(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

よって停留点は $(8/7, 2/7)$ のみ

この点でのヘッセ行列は正定値なので,

この停留点は極小解

レポート問題の解答例



問題3：対称な 2×2 行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

$$A \text{ は半正定値} \Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

(ヒント: 教科書の問題3.7の答えを参考にせよ)

a_{11} または a_{22} が非ゼロのときは, a_{11} (または a_{22}) による割り算が出来るので, 授業で示した正定値性に関する証明と同様にして証明できる.

$a_{11}=a_{22}=0$ のときの証明は, これらの値で割り算が出来ないので注意が必要である. (実は, この場合の証明は簡単)