数理計画法　第10回

ネットワーク計画
３．最小費用フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習:最大フロー問題

目的:供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい

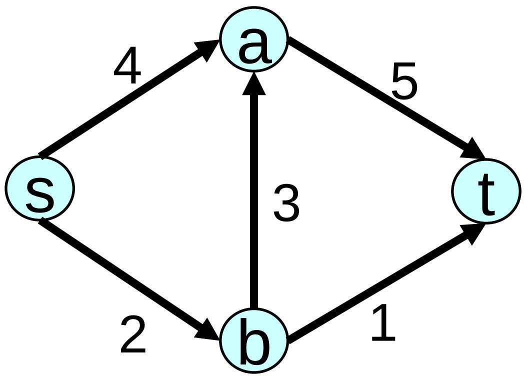
条件1(容量条件):

0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量

条件2(流量保存条件):

頂点から流れ出すフローの量＝　流れ込むフローの量

問題例と定式化



最大化　f

条件

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3,$$
$$0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1$$

応用：供給・需要を満たすフローを求める

入力：有向グラフ G = (V, E)

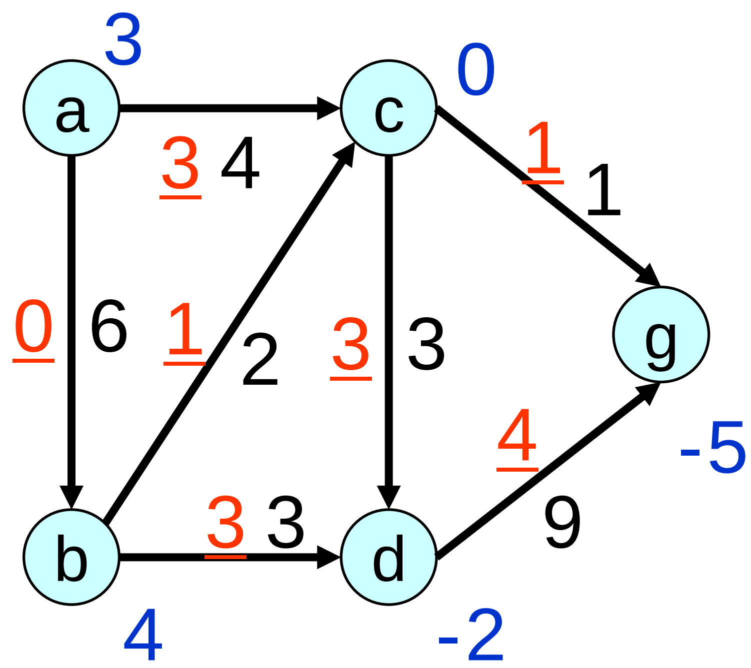
各枝 (i, j) ∈ E の容量 $u_{ij} \geqq 0$

各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

(b_i >0➔ i は供給点，b_i<0➔ i は需要点)

出力：次の条件を満たすフロー

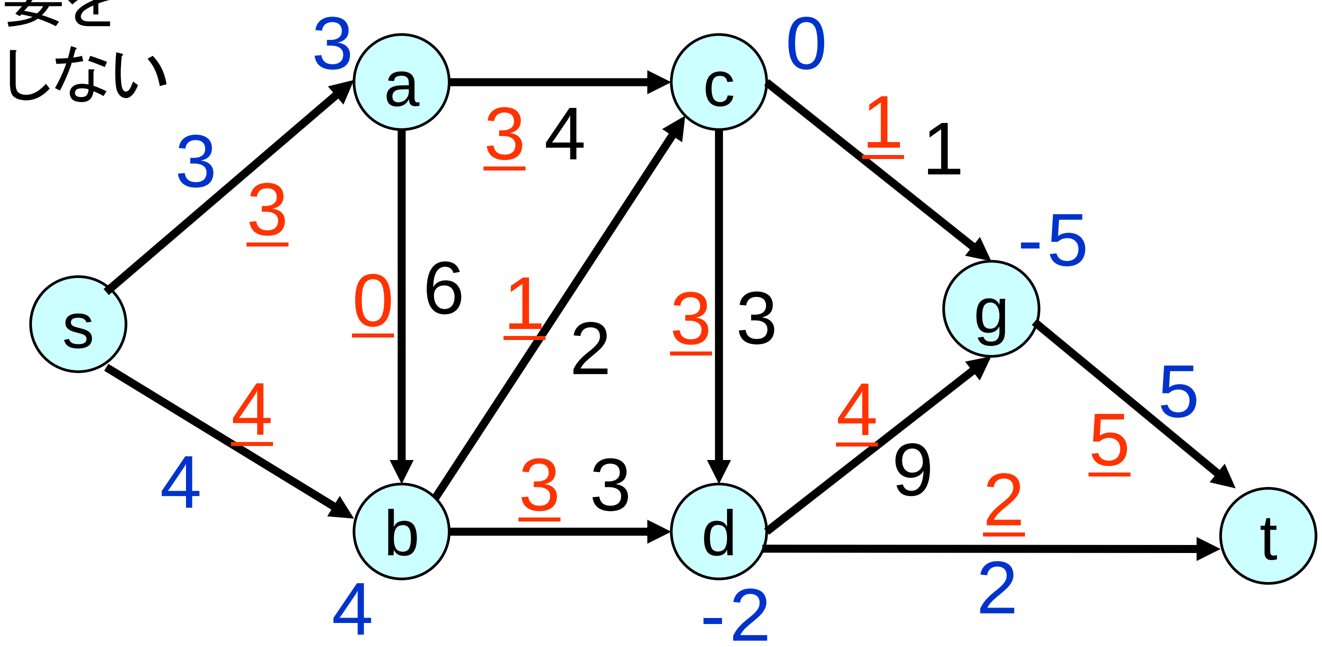
- 各頂点i ∈Vでの供給・需要条件
  （i から流出するフロー量）
  ー（i に流入するフロー量）＝b_i
- 各枝 (i, j) の容量条件
  $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$



応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大フロー問題に帰着する

(1)新たな頂点 s（供給点）, t（需要点）を追加
(2)$b_i > 0$ ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)$b_i < 0$ ならば枝(i, t)を追加，容量は $-b_i$
(4)最大フローを求める.
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を満たすフローは存在しない



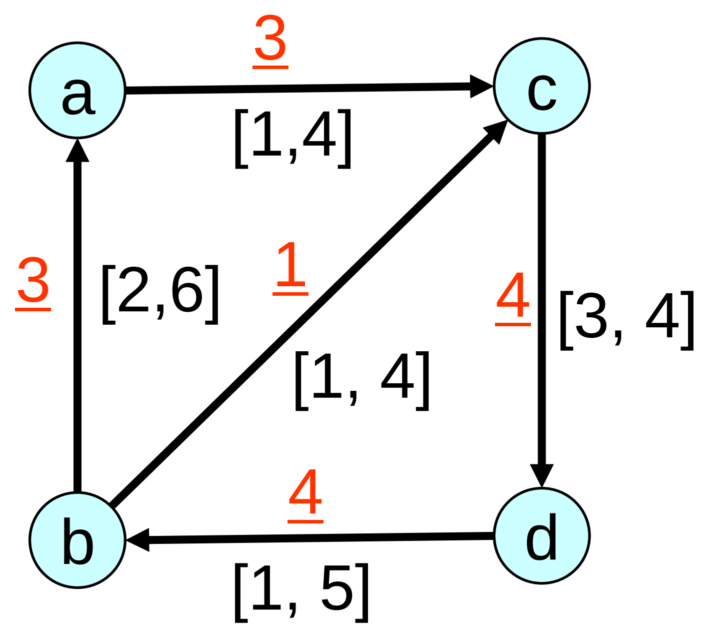
需要・供給を満たすフローが存在

応用:上下限制約を満たすフローを求める

入力：有向グラフ G = (V, E)
各枝 (i, j) ∈ E フローの上限値 u_{ij}, 下限値 l_{ij} $(0 \leqq l_{ij} \leqq u_{ij})$

出力：次の条件を満たすフロー
●各頂点i ∈V での流量保存条件
（i から流出するフロー量）
ー（i に流入するフロー量）＝0
●各枝 (i, j) の上下限条件

$$l_{ij} \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$$

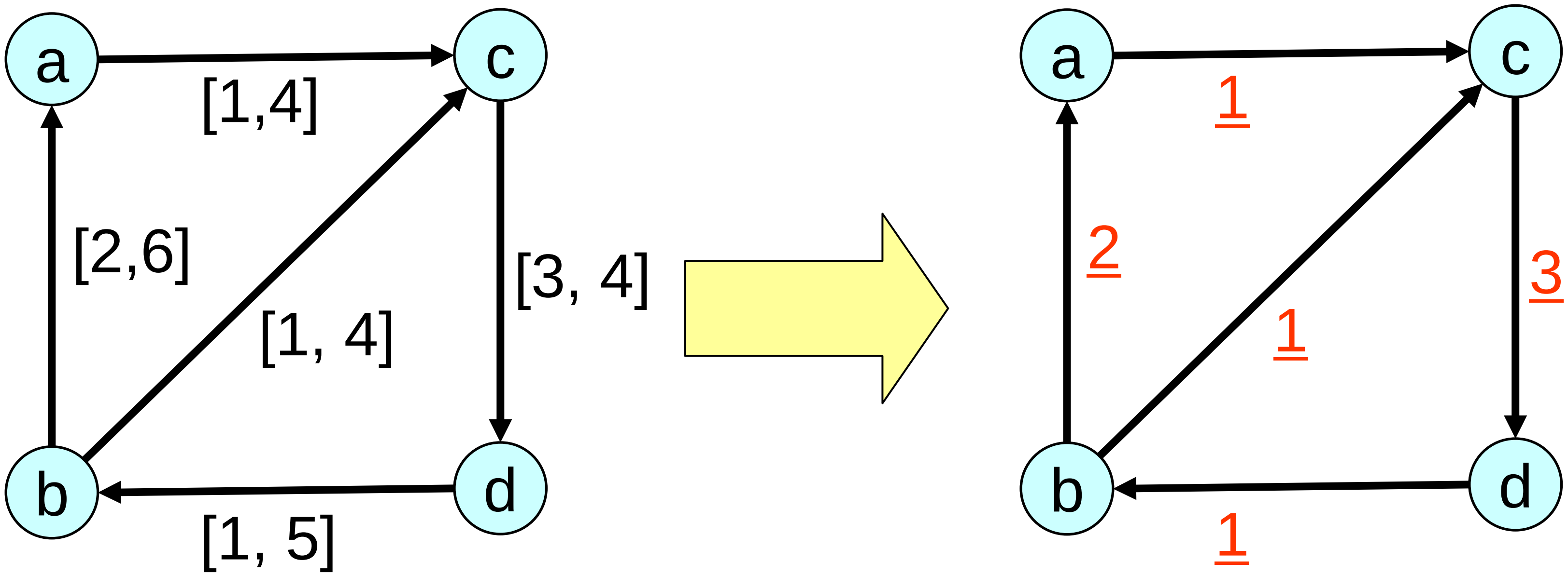


応用:上下限制約を満たすフローを求める

供給・需要を満たすフロー(l_{ij}=0)を求める問題に帰着する

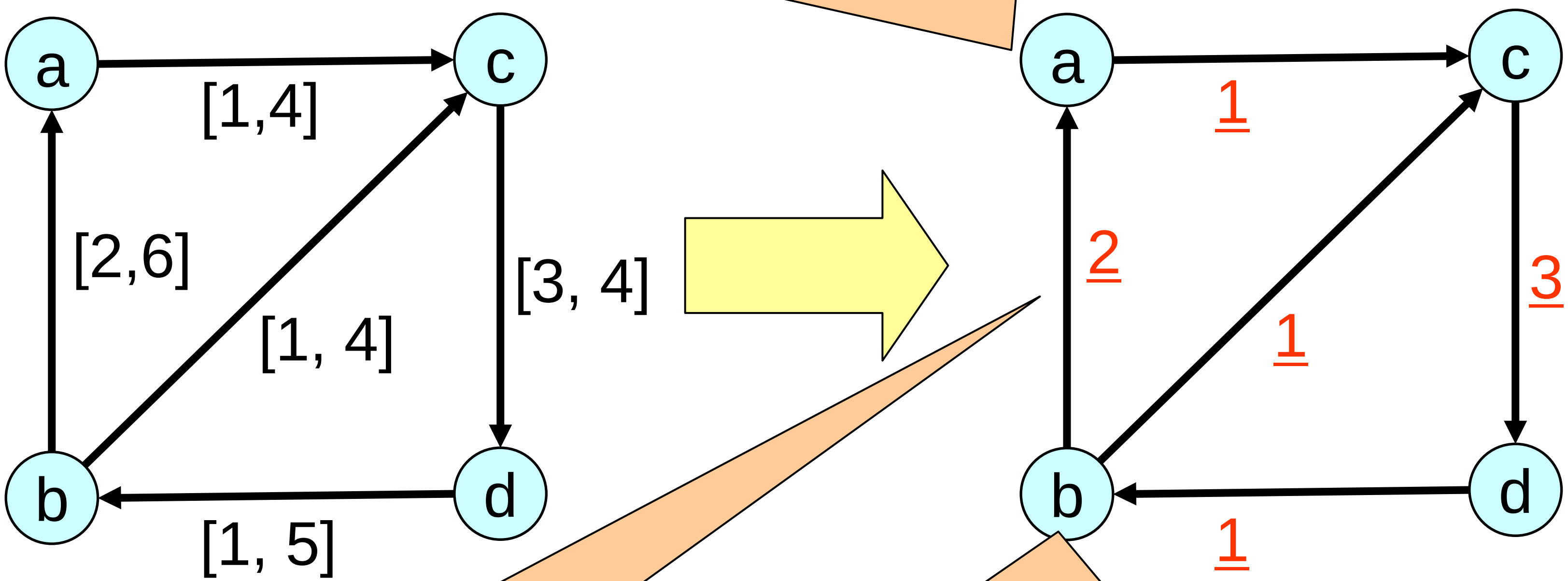
- 流量保存条件を無視して, $x_{ij} = l_{ij}$ というフローを流す
  - 流量保存条件が成り立っている➔OK
  - 流量保存条件が成り立っていない
    ➔各枝のフローを増加させることにより,
    流量保存条件を満たすようにする

どのようにして
フローを増加
させるか?



応用：上下限制約を満たすフローを求める

（入ってくるフロー量: 2）
＞（出て行くフロー量: 1）
➔ 出て行くフローを1だけ増やしたい

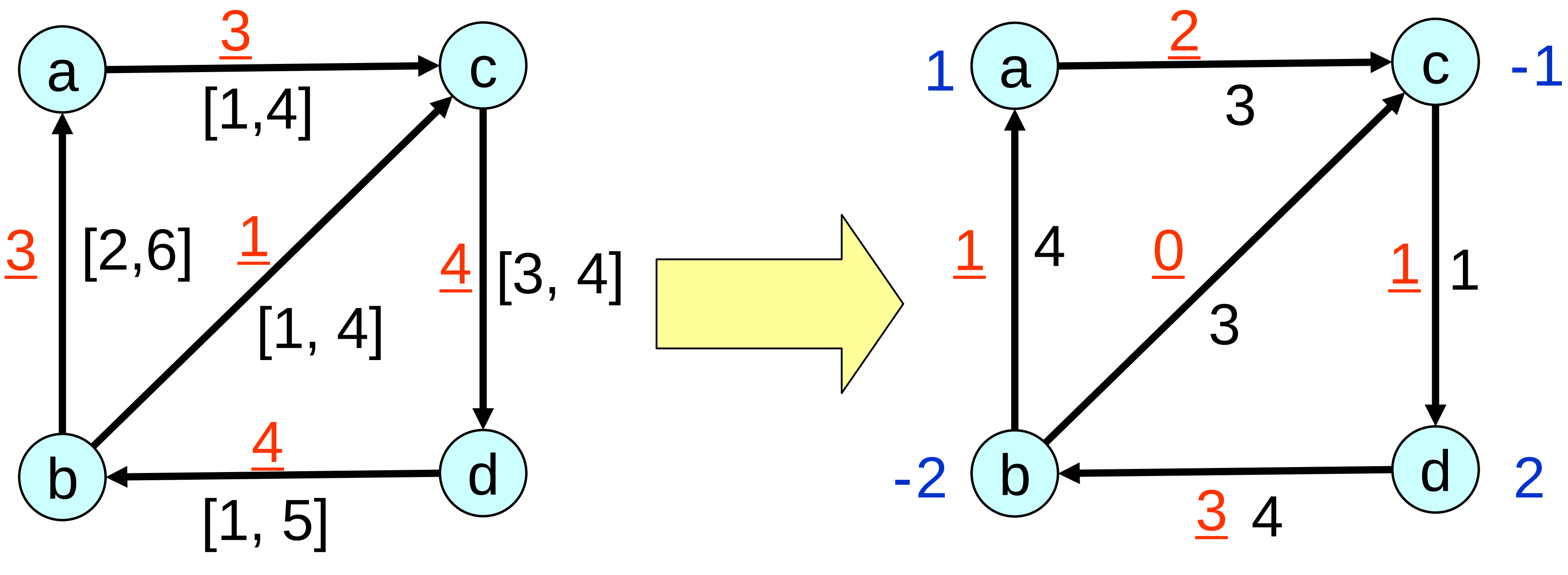


現在のフロー量は $x_{ij} = l_{ij}$
➔増加できる量は
最大で $u_{ij} - l_{ij}$

（入ってくるフロー量: 1）
＜（出て行くフロー量: 3）
➔ 入ってくるフローを2だけ増やしたい

応用：上下限制約を満たすフローを求める

供給・需要を満たすフローを求める問題に帰着される



この問題のフロー x_{ij} が得られた

$x_{ij} + l_{ij}$ は元の問題のフロー
（許容解）

最小費用フロー問題の定義

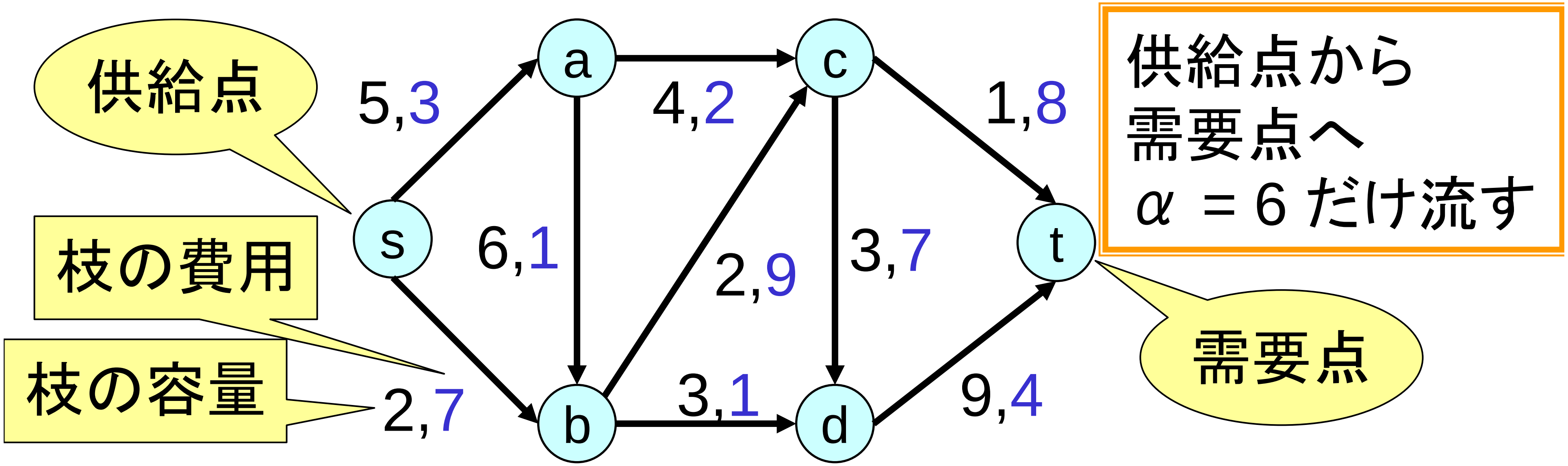
入力：有向グラフ G = (V, E)

供給点 s ∈ V, 需要点 t ∈ V,

需要（供給）量 α > 0

各枝 (i, j) ∈ V の容量 u_{ij} ≧ 0, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題の定式化

最小化　$\Sigma\{ c_{ij}\, x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$

各枝の費用×フロー量　の和

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$

$(k \in V - \{s, t\})$

各頂点での流量保存条件

需要供給量に関する条件

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = \alpha$

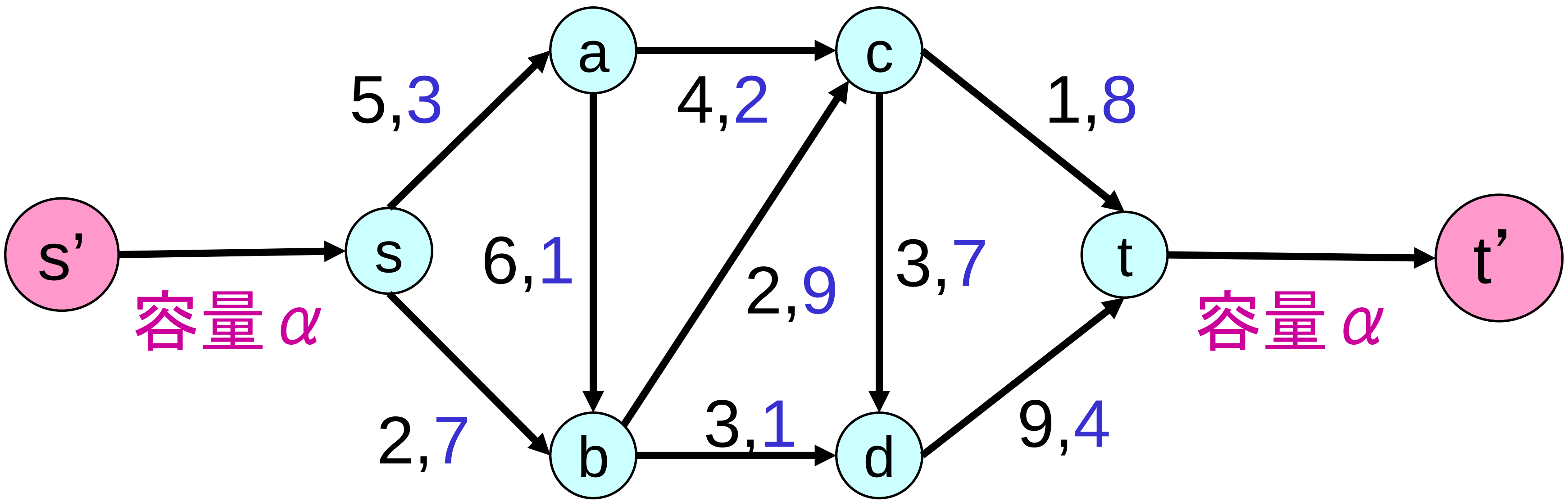
$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -\alpha$

需要供給を満たすフローの求め方

（1）人工問題として最大フロー問題を作る
（2）人工問題の最大フローにおいて

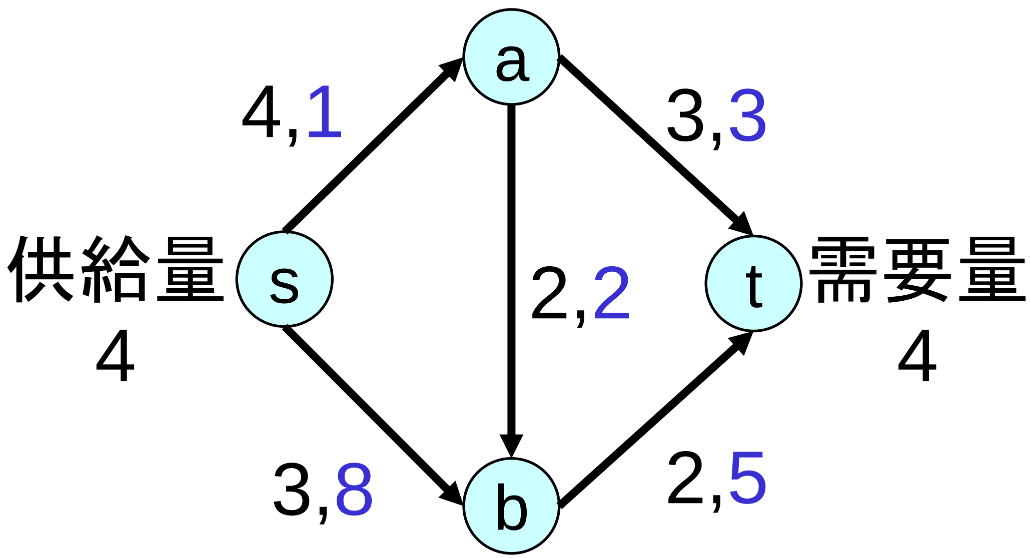
$f = \alpha$ ⇒ 現在のフローは需要供給を満たす

$f < \alpha$ ⇒ 需要供給を満たすフローは存在しない



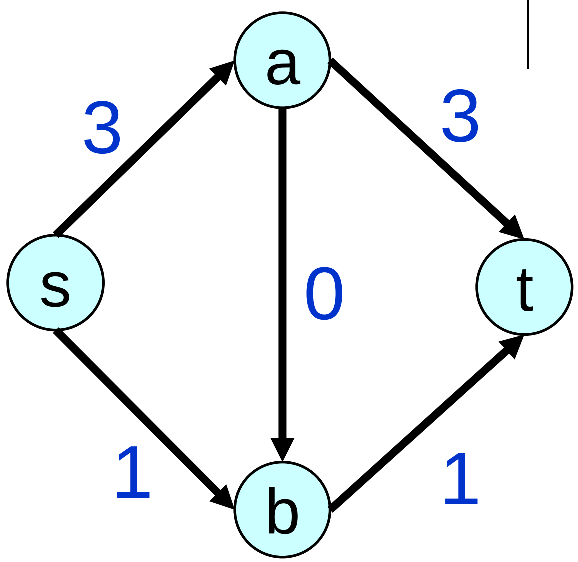
各枝の費用は無視

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

－－－　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大フローのときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

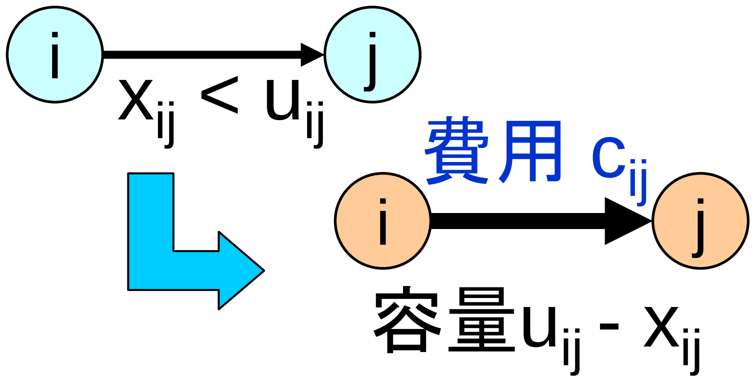
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} < u_{ij} \}$

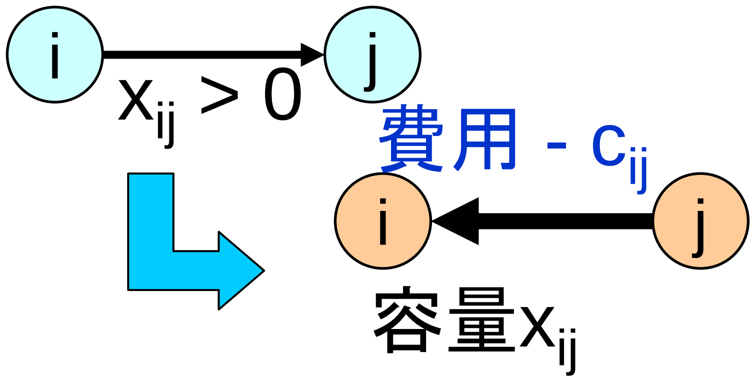
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



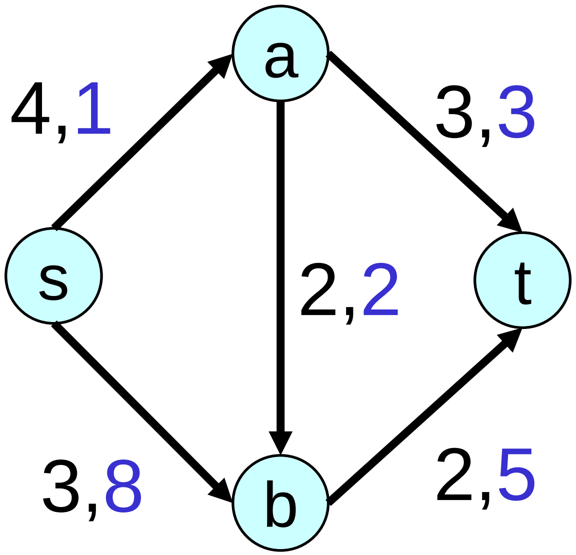
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} > 0 \}$

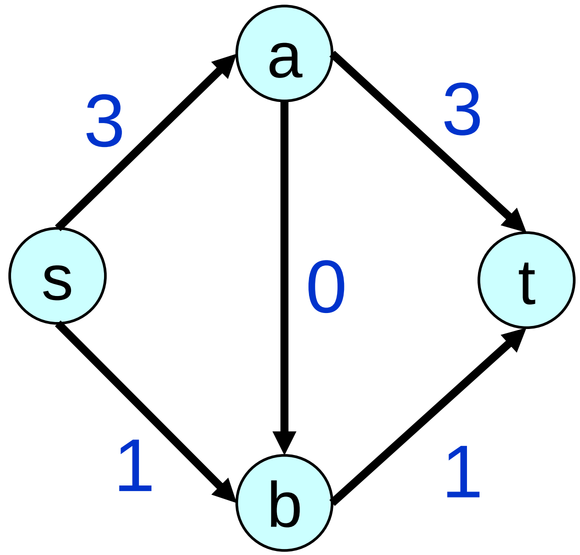
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 - c_{ij}



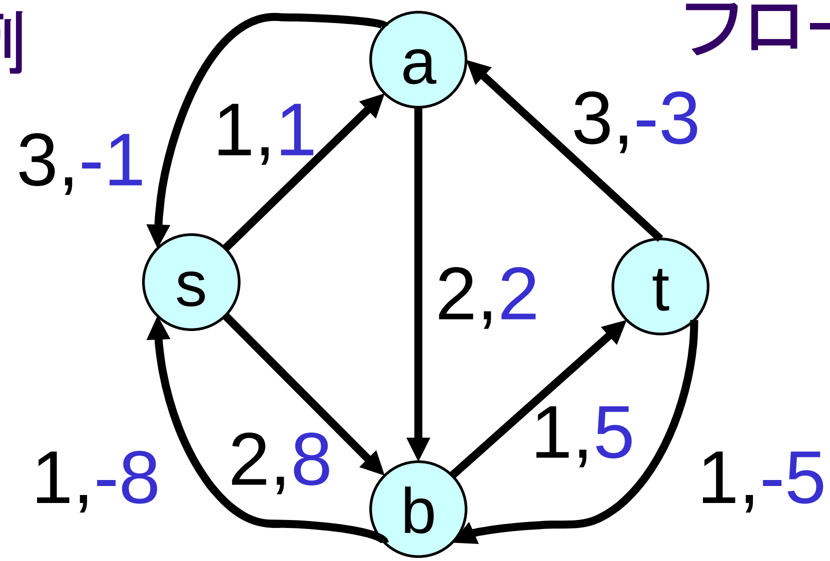
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例



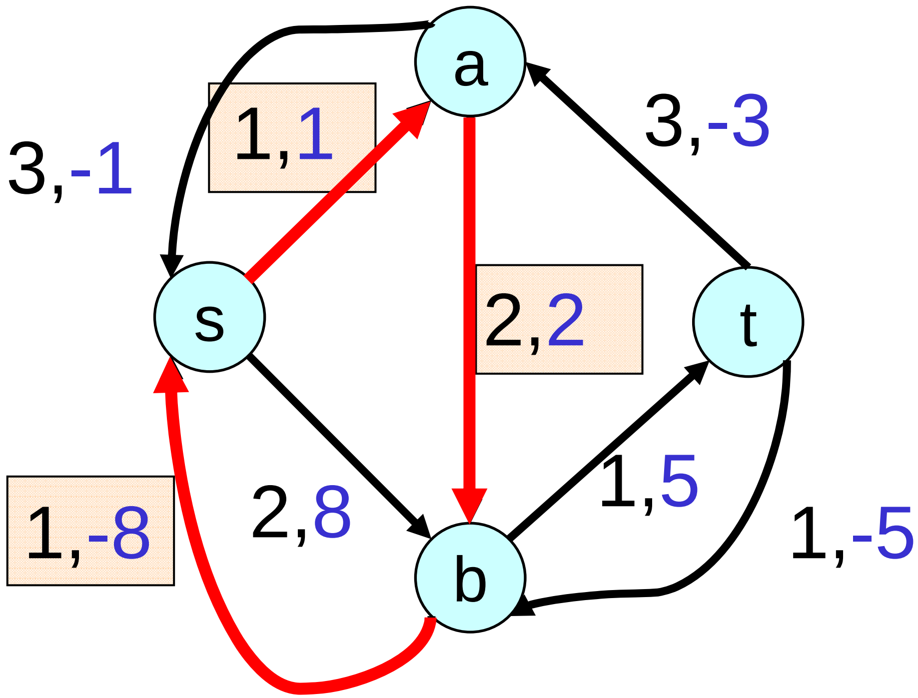
フローの例



残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(その1)

残余ネットワークの閉路に注目



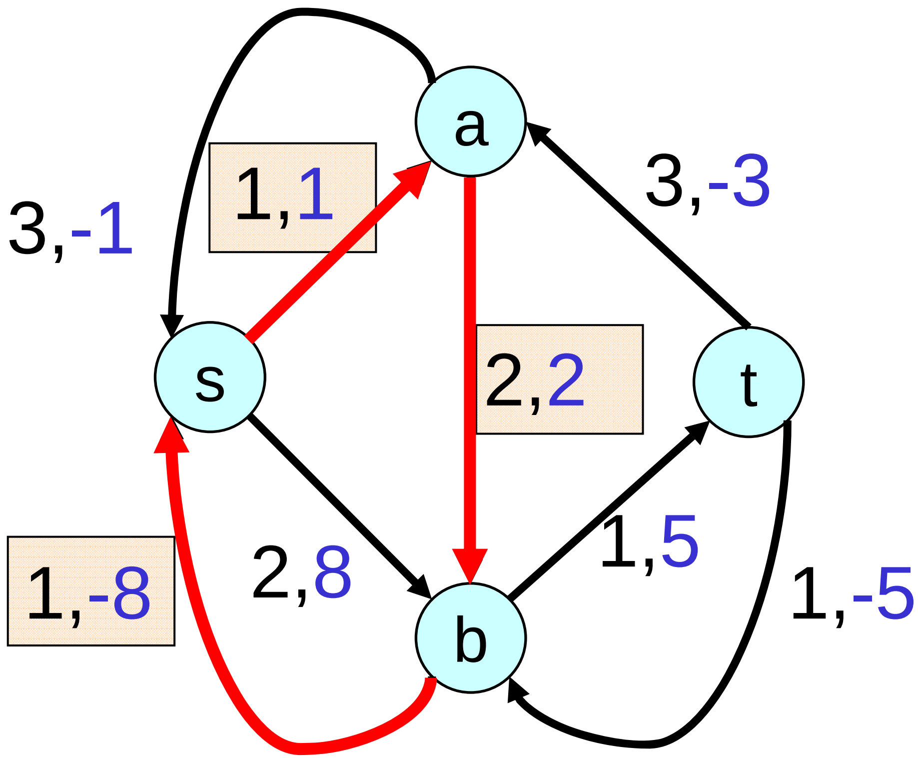
閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の容量の最小値=1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の費用の和=-5

残余ネットワークの性質(その2)

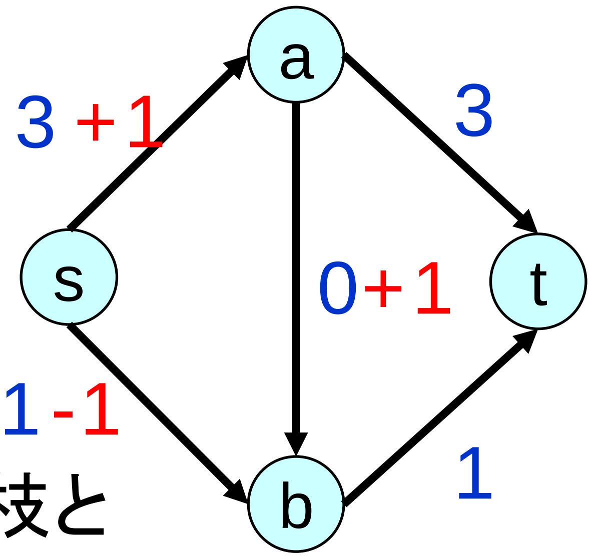
残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

残余ネットワーク



閉路の容量 α=1
閉路の費用 γ=-5

フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋α
逆の向き⇒フロー値に－α
無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は$\alpha\gamma$(＝－5)増加

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

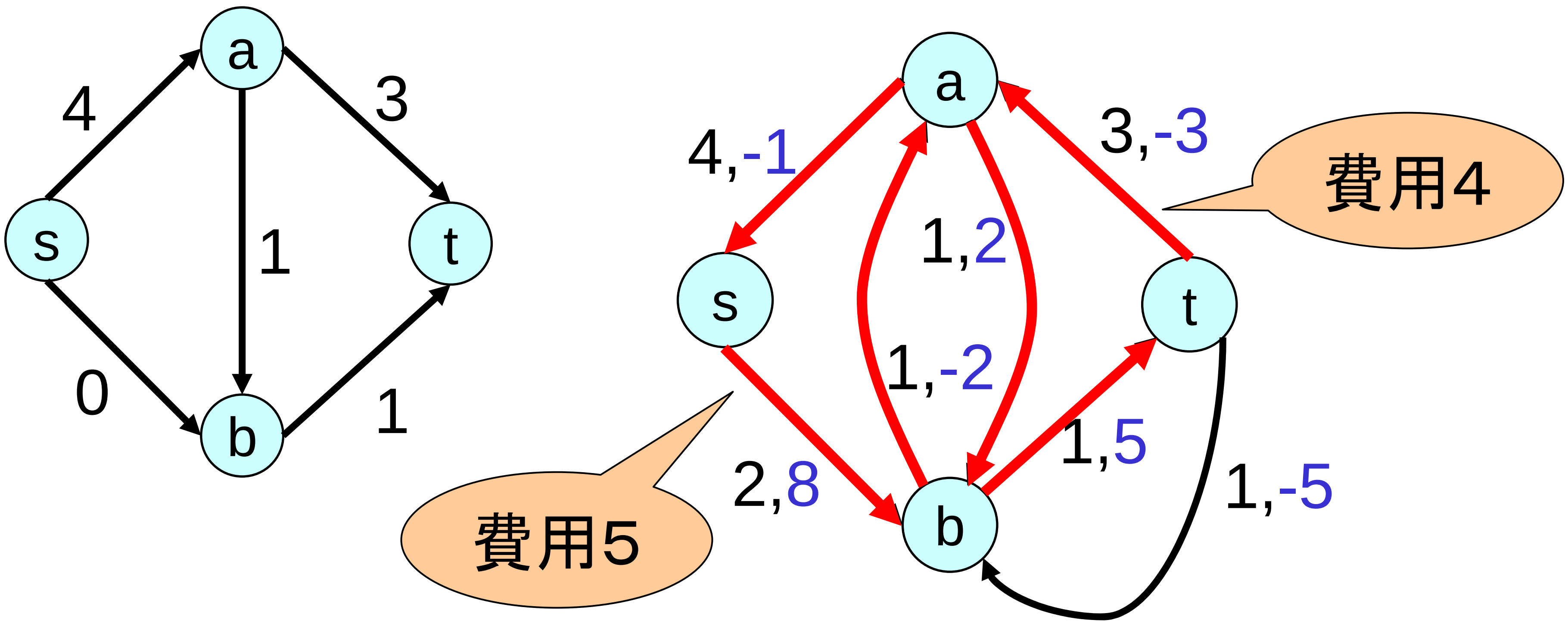
定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒　フローの費用を減少させることが可能
⇒　現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ(証明は後で)

定理２：現在のフローは費用最小でない
⇒　残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー　　　　　残余ネットワーク



費用が負の閉路がない

⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去法

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて、需要供給量を満たす
フローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

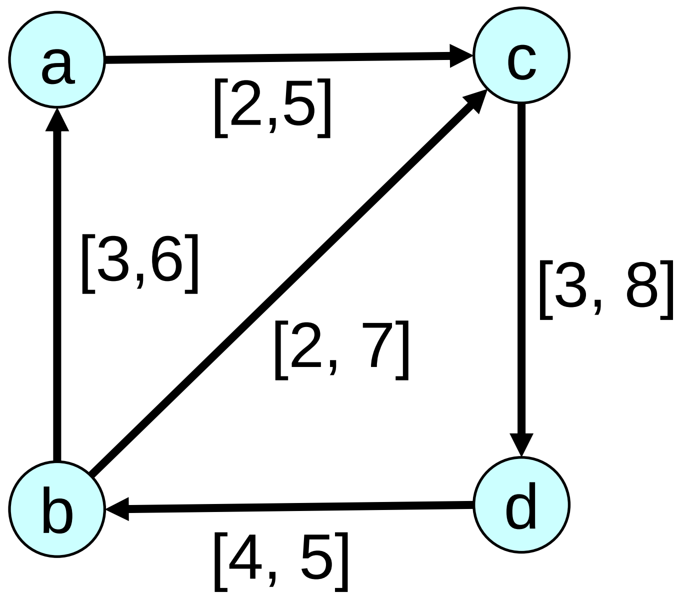
ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が
存在しない⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、
それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

レポート問題

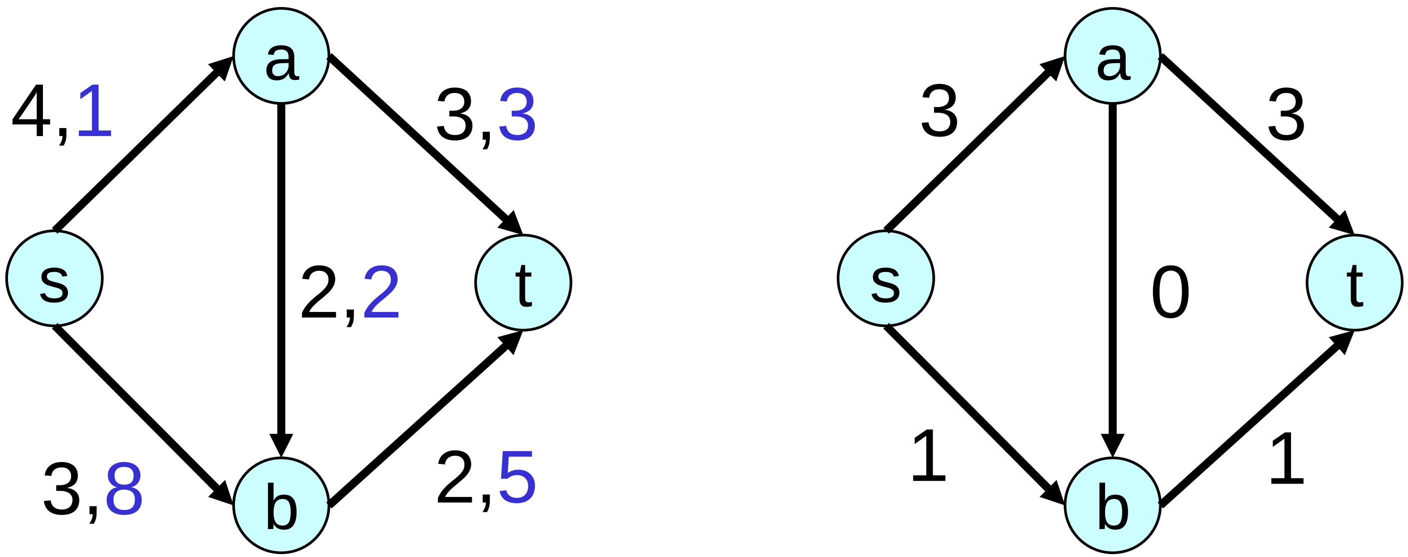
問1: 以下のようなネットワークを考える.
[a, b]は各枝のフロー量xの上下限(a: 下限値, b: 上限値)を表す.
このネットワークにおいて, 枝のフロー量の上下限制約を満たし,
かつ全ての頂点において流量保存条件を満たすフローを求めたい.
(1)この問題を, 需要・供給を満たすフローを求める問題に
帰着しなさい.
(2)帰着して得られた問題の解を1つ求めなさい.
(3) (2)の結果を使い, 元の問題の解を1つ求めなさい.



レポート問題

問2: 次の最小費用フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）与えられた初期フローに対して負閉路消去法を適用し，
最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(a)　需要供給量4　　　　初期フロー

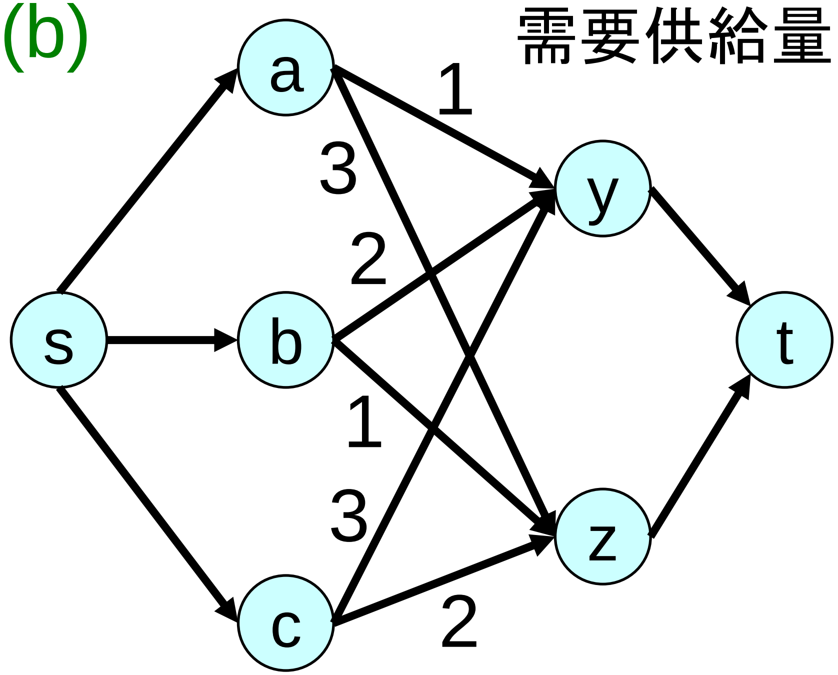


レポート問題

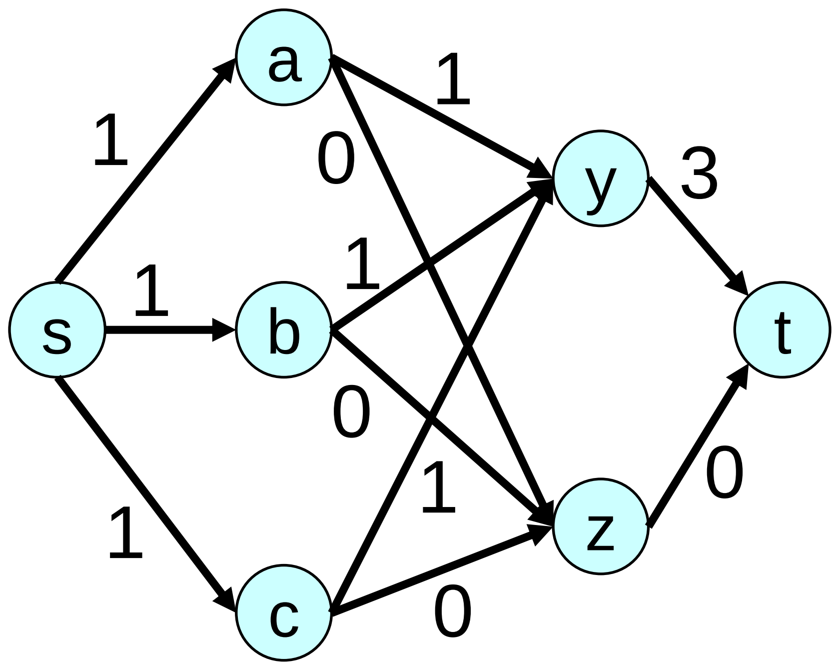
問3: 次の最小費用フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）与えられた初期フローに対して負閉路消去法を適用し，
最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(b)

需要供給量＝3



初期フロー



枝(y, t), (z, t) の容量は3，それ以外の枝の容量は1
s から出る枝と t に入る枝の費用は0，それ以外は各枝の数値を参照

応用:プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

エクスポスの優勝可能性

× 残り全勝しても80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィリーズ	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの優勝可能性 ×

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83 83	71		1	6	1
フィリーズ	80 81	79	1		0	2
メッツ	78 84	78	6	0		0
エクスポス	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で下位チームが上位チームに勝った場合

○

優勝の可能性はゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

では，次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所属のチームとの試合

	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	タイガース	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
タイガース	49	86	3	4	0	0		20

タイガースは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上➔優勝の可能性？

最大フロー問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

タイガースにとって都合の良いケースのみ考える

- タイガースは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗

東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

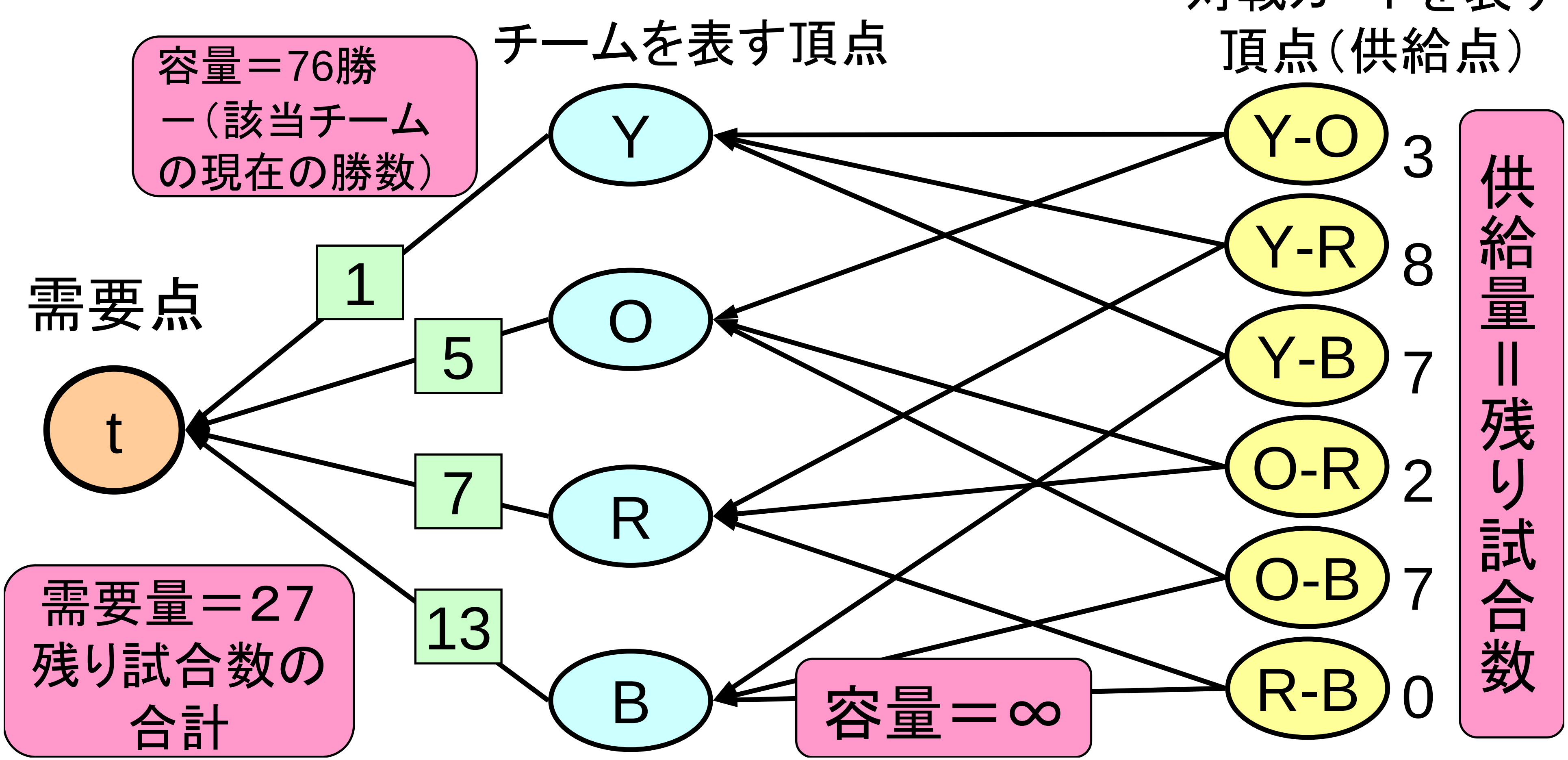
- どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
  ➔優勝の可能性なし　需要供給を満たすフローが存在しない
- あるケースにおいては，他チームは全て76勝以下
  ➔優勝の可能性あり　需要供給を満たすフローが存在する

需要供給を満たすフローを求める問題に帰着

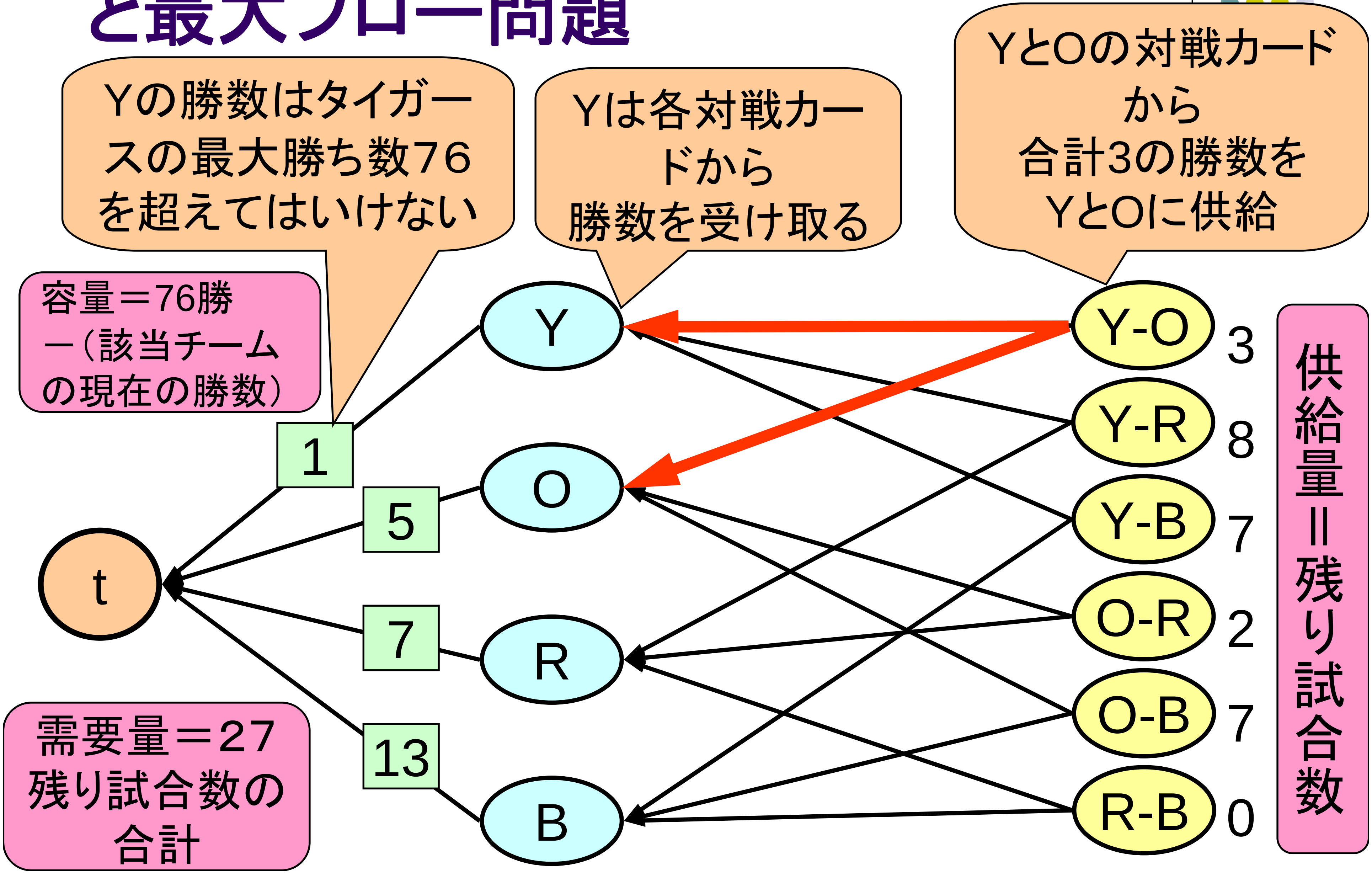
プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

ネットワークの作り方

需要供給を満たすフローが存在
⇔優勝可能性が存在



プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題



演習問題（レポート提出の必要なし）

問題： ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ