数理計画法　第9回

ネットワーク計画

2. 最大フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習：最大フロー問題

目的：供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい

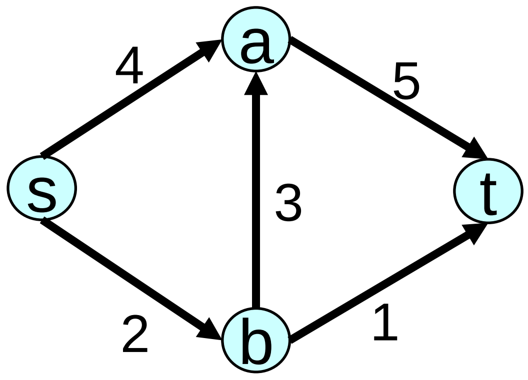
条件1（容量条件）：

0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量

条件2（流量保存条件）：

頂点から流れ出すフローの量＝ 流れ込むフローの量

問題例と定式化



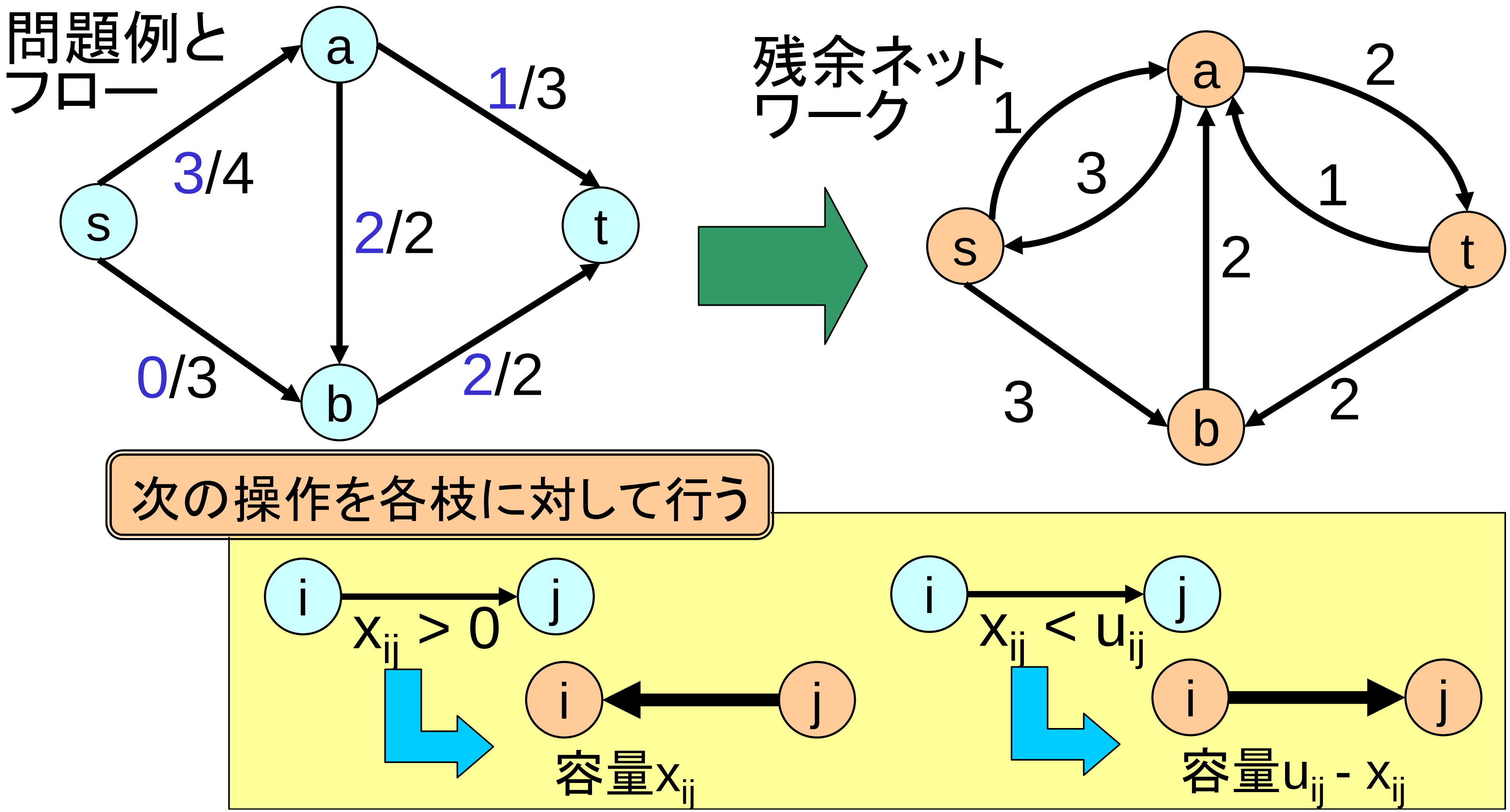
最大化 f

条件

$$
\begin{aligned}
& x_{sa} + x_{sb} = f \\
& x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0 \\
& x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0 \\
& -x_{at} - x_{bt} = -f \\
& 0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3, \\
& 0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1
\end{aligned}
$$

復習：残余ネットワーク

残余ネットワーク：最大フローを求めるための「道具」



残余ネットワークに関する定理

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

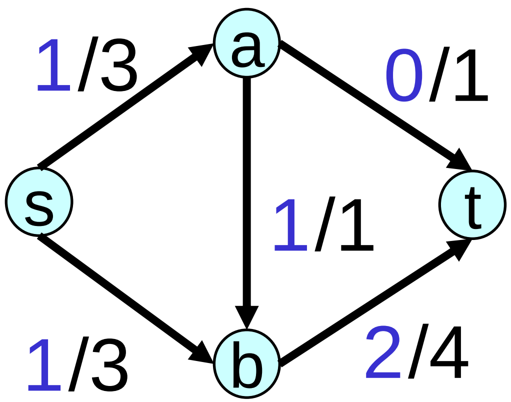
定理２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

以下，これらの定理を証明する

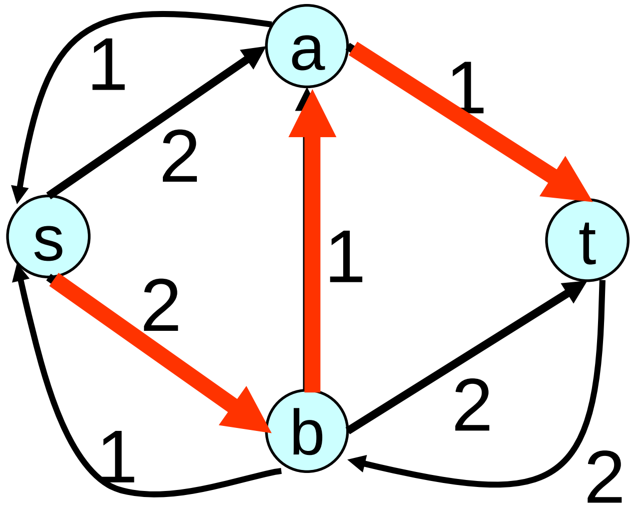
定理1の例

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

与えられた問題と
現在のフローx

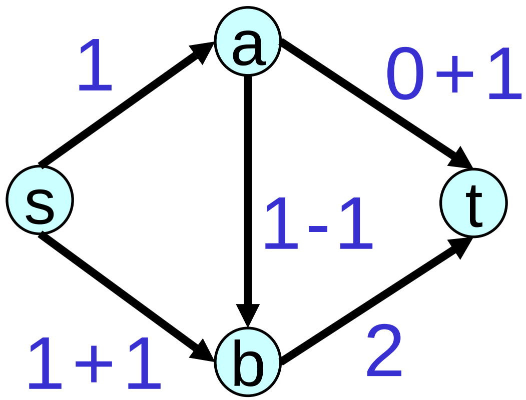


残余ネットワーク



s–t パスが存在

新しいフローx’



フロー値が
１増えた

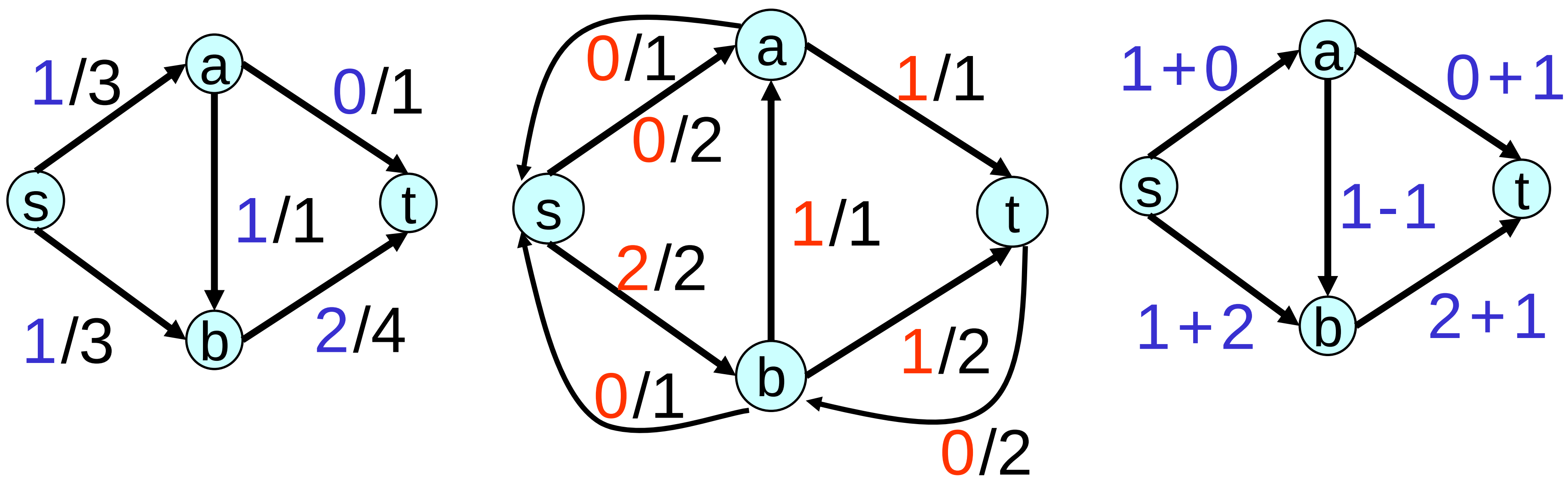
残余ネットワークの性質(定理1)

（現在のフロー x）＋（残余ネットワークのフロー y）
＝（新しいフロー x'）

与えられた問題と
現在のフローx

残余ネットワークと
そのフローy

新しいフローx'

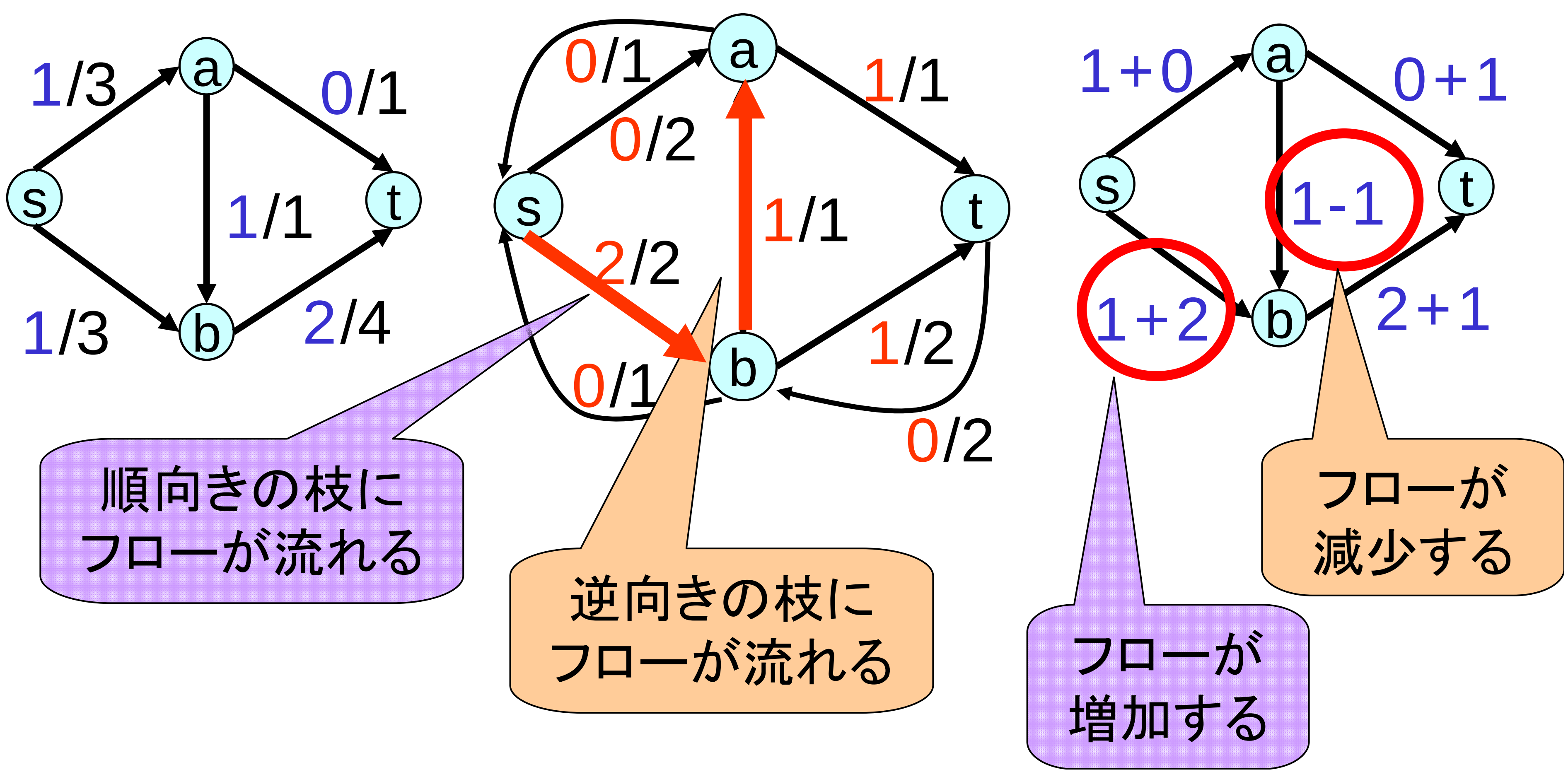


残余ネットワークの性質(定理1)

与えられた問題と
現在のフローx

残余ネットワークと
そのフローy

新しいフローx’



残余ネットワークの性質（定理1）

（現在のフロー x）＋（残余ネットワークのフロー y）
＝（新しいフロー x’）

（xのフロー値）＋（yのフロー値）＝（x’のフロー値）

残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在するとき，
現在のフローは増加可能

どうやって見つけるか？

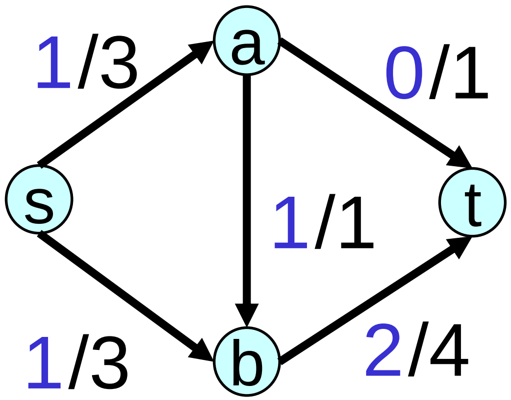
残余ネットワークの性質（定理1）

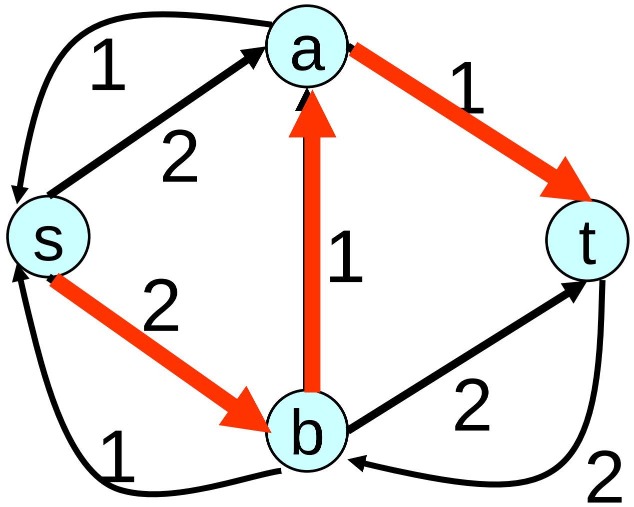
残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

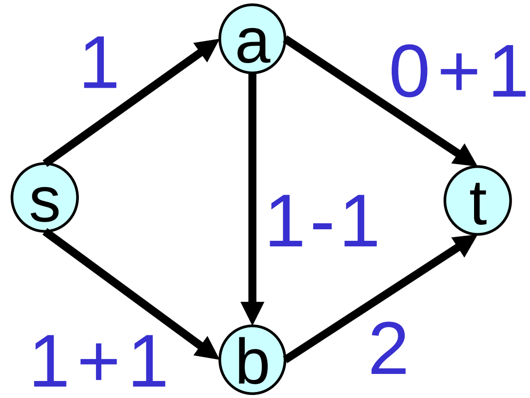
与えられた問題と
現在のフローx

残余ネットワーク

新しいフローx’







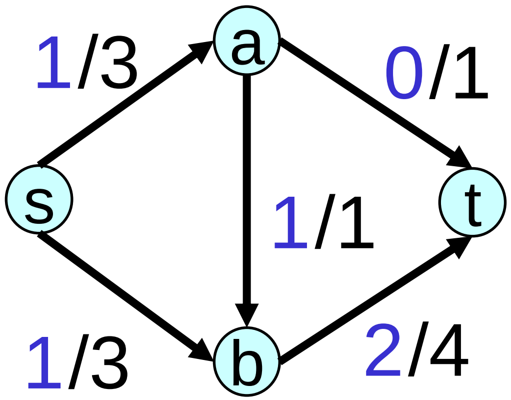
パスに沿ってフローが流せる
フロー量＝パス上の枝の最小容量

フロー値が
１増えた

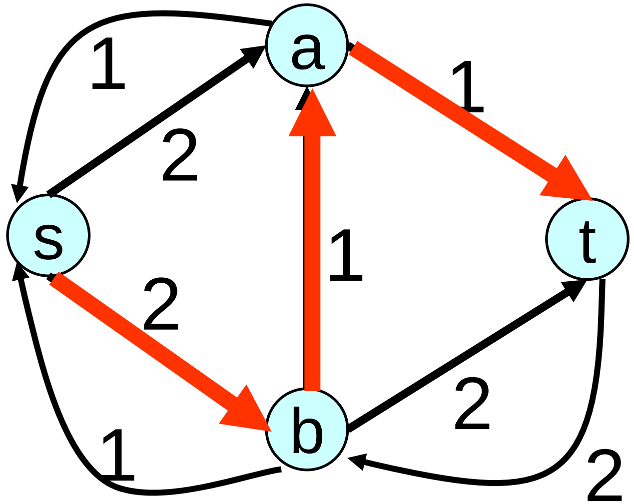
残余ネットワークの性質(定理1)

残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

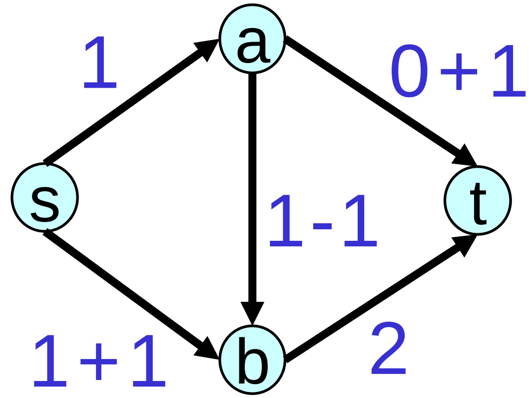
与えられた問題と
現在のフローx



残余ネットワーク



新しいフローx’



定理1：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない ⇒ 終了

ステップ3：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する

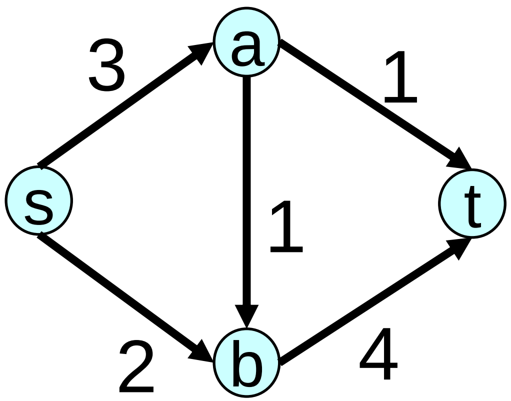
ステップ4：ステップ1へ戻る

このアルゴリズムにより本当に最大フローが得られるのか？

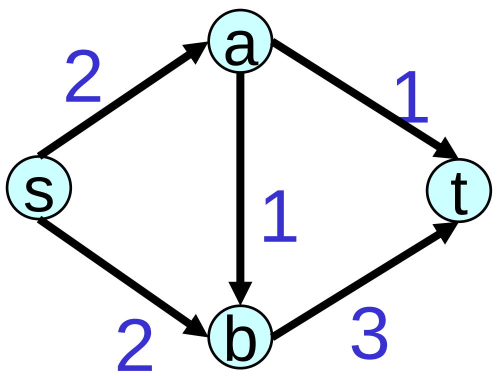
定理2の例

定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

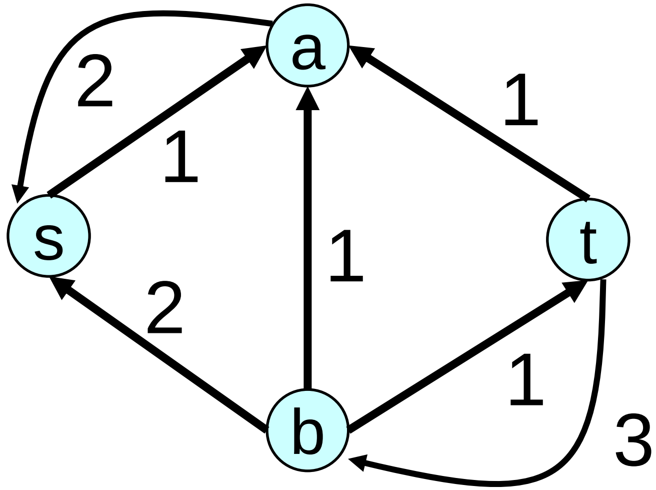
与えられた問題



現在のフロー



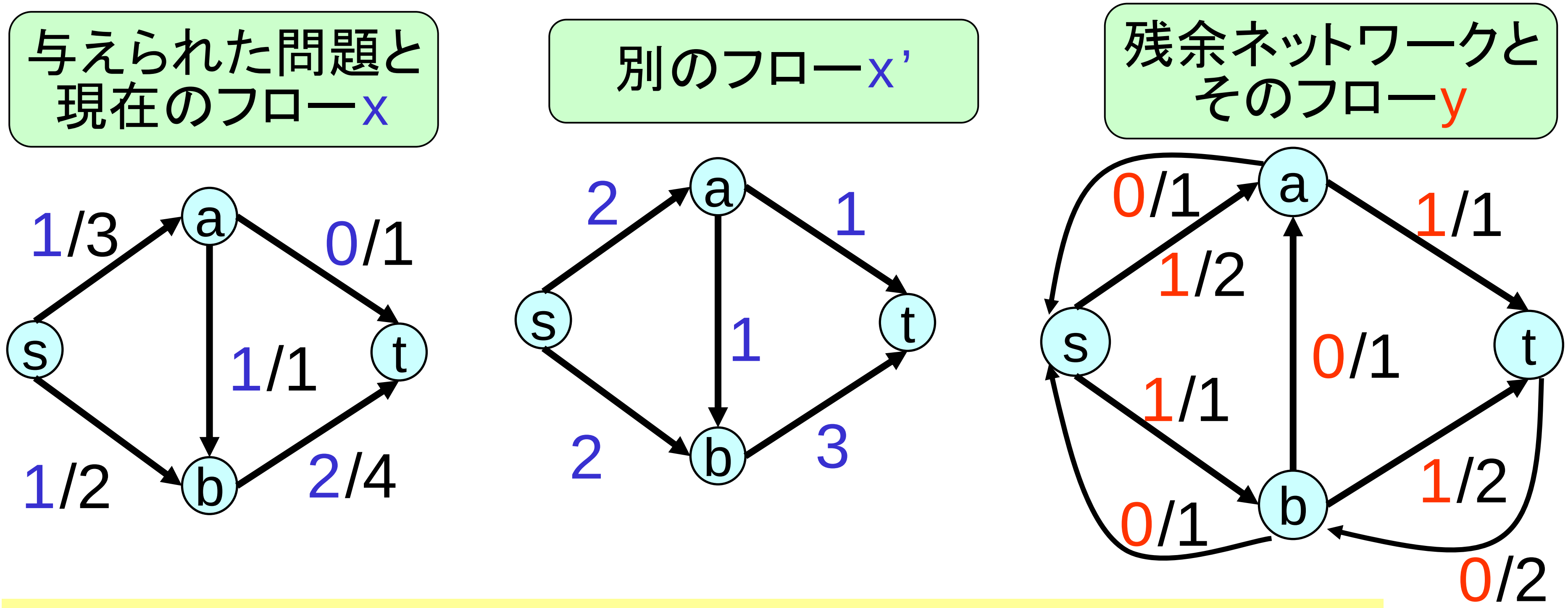
残余ネットワーク



s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

残余ネットワークの性質（定理2）

性質：（別のフロー x'）ー（現在のフロー x）
＝（残余ネットワークのフロー y）



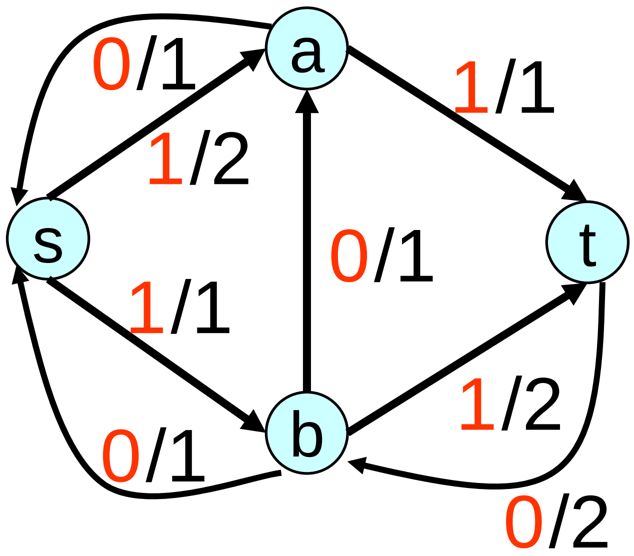
（x'のフロー値）ー（xのフロー値）＝（yのフロー値）

x'：最大フロー，x：最大でないフロー ➔（yのフロー値）＞0

残余ネットワークの性質(定理2)

性質：フロー値＞0のsからtへのフローが存在
➔ネットワークにs-tパスが存在

残余ネットワークと
そのフローy
フロー値＞0



直感的なイメージ(証明ではない)：
sからtへのフローが存在
➔sからフローを辿っていくと,
　tに辿り着くルートが存在
➔ネットワークに s-t パスが存在

残余ネットワークの性質(定理2)

性質：(別のフロー x’)ー(現在のフロー x)
＝(残余ネットワークのフロー y)

ゆえに　x’:最大フロー，x:最大でないフロー
➔(yのフロー値)＞0

性質：フロー値＞0のsからtへのフローが存在
➔ネットワークにs-tパスが存在

定理２：現在のフローは最大フローでない
➔ 残余ネットワークに s-t パスが存在する

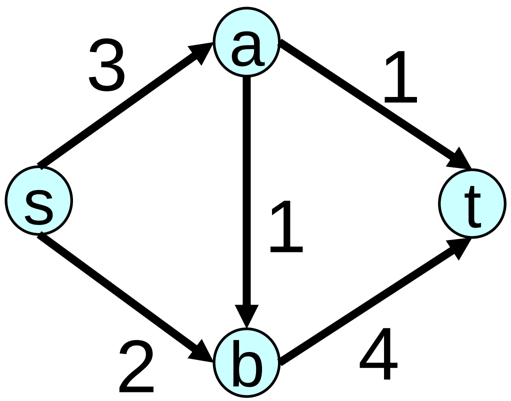
(対偶)残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔現在のフローは最大フローである

残余ネットワークの性質(定理2)

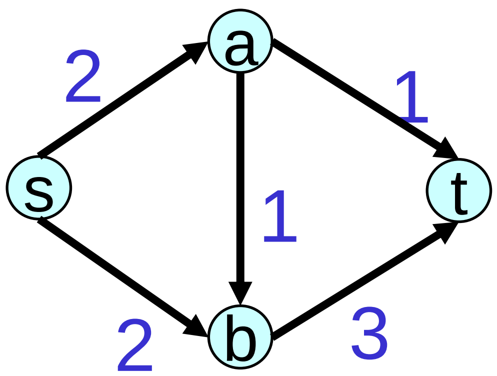
定理2:残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

フロー増加法は必ず最大フローを求める！！

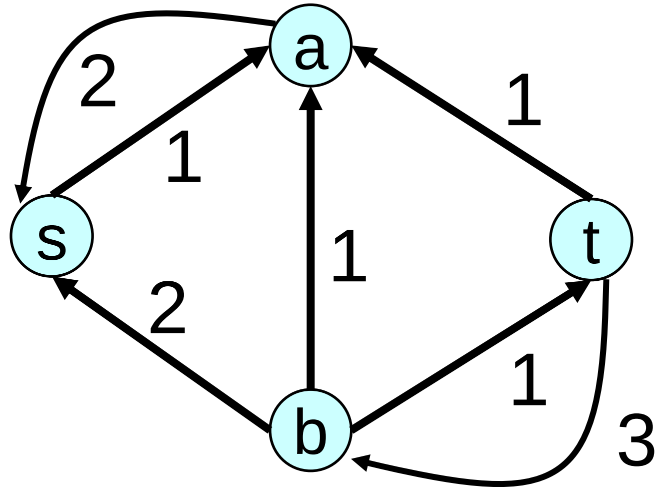
与えられた問題



現在のフロー



残余ネットワーク



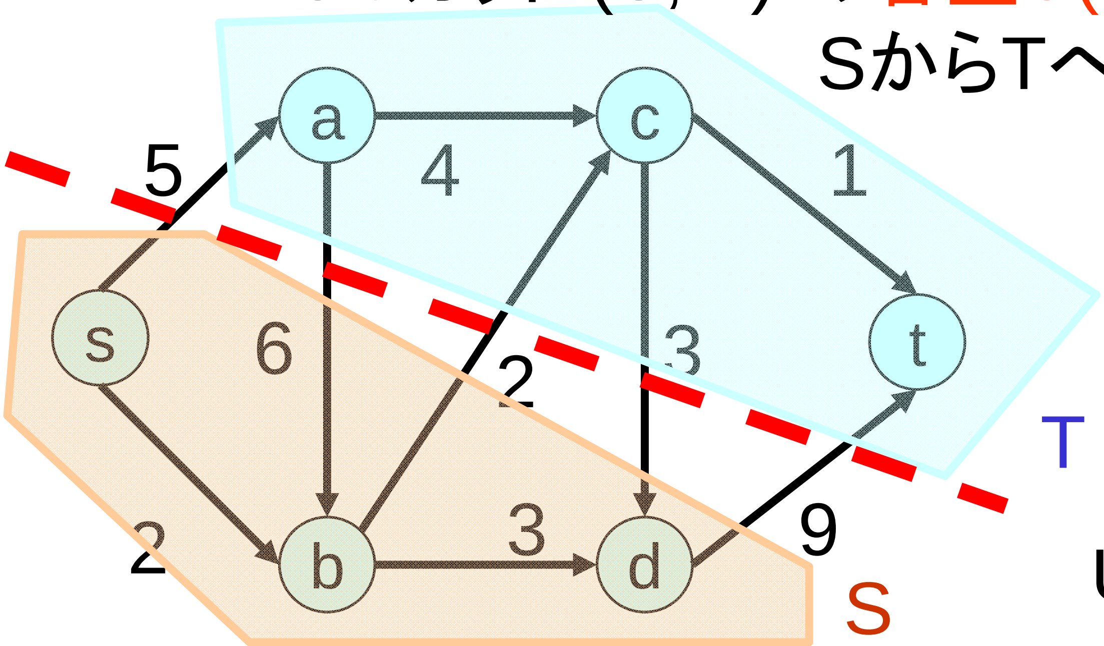
s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

s-t カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックは
どこになるか？

s-t カット (S, T): s ∈ S, t ∈ T,
S, T は頂点集合Vの分割（S∩T = ∅, S∪T = V）

s-t カット (S, T) の容量U(S,T):
SからTへ向かう枝の容量の和



U(S,T)=5+2+9=16

s-t カットの性質（その1）

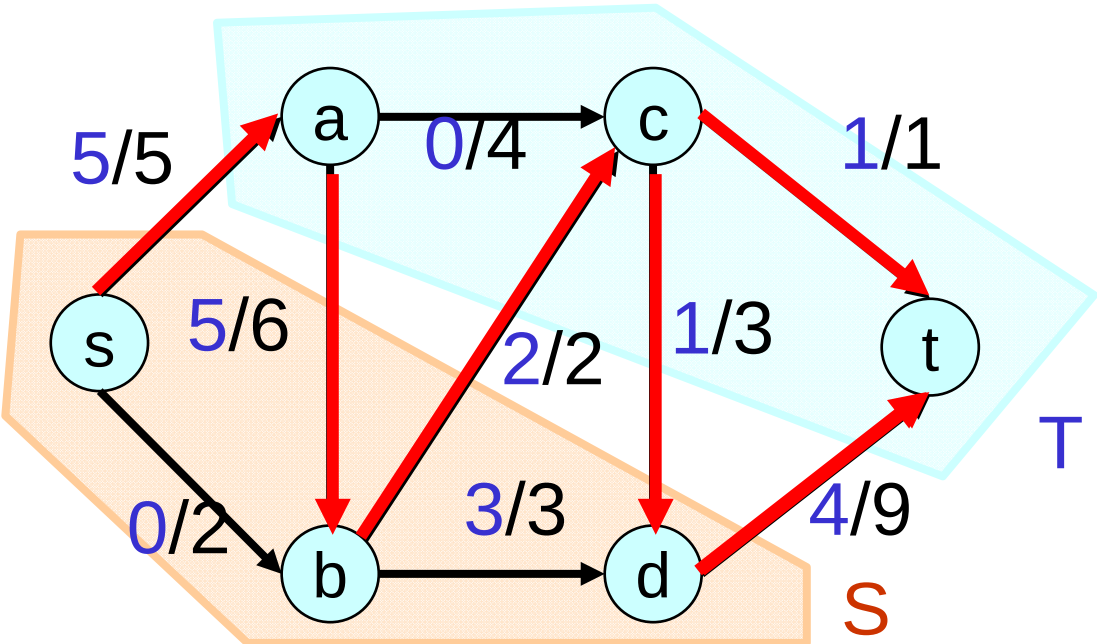
性質1：

任意のs-tカット(S, T) と任意のフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフロー量の和 x(S,T)

ー TからSへの枝のフロー量の和 x(T,S)

＝ フロー値 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

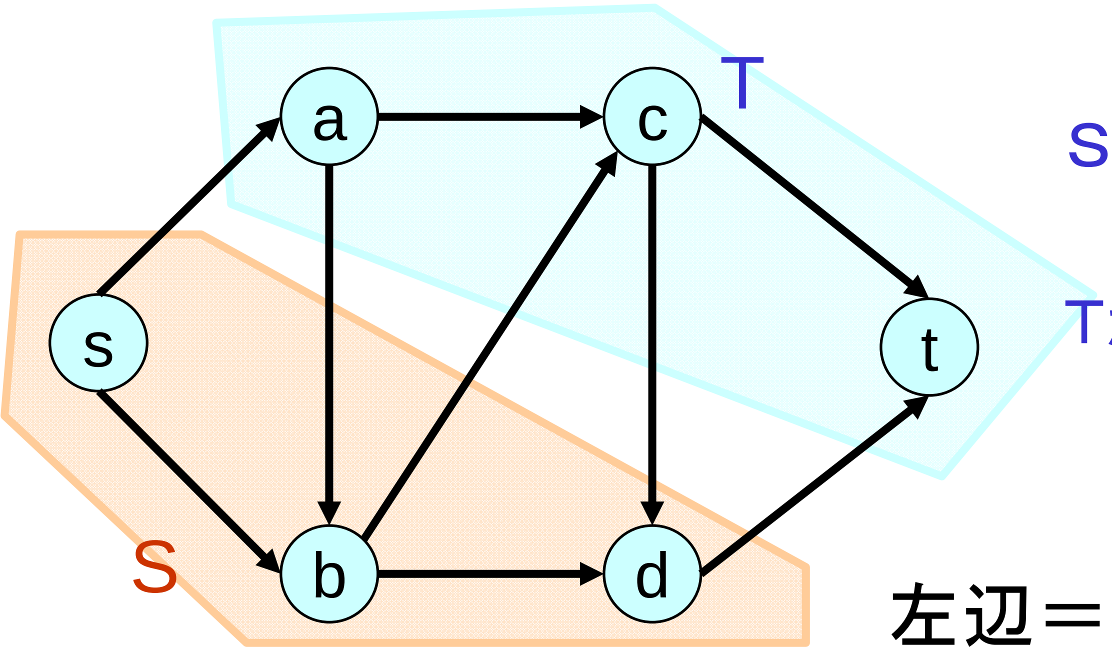
f = 11 – 6 = 5

s-t カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は
登場しない

左辺＝$(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

s-t カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$
$- \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$ $(k \in S - \{s\})$

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が－1

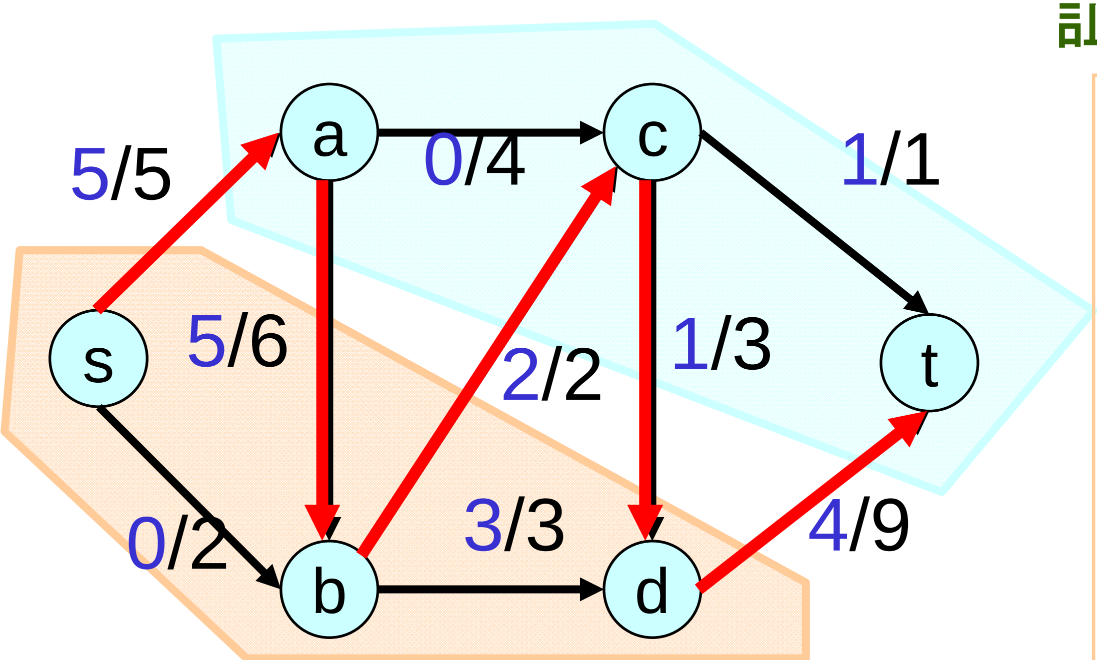
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

⇒ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

s-t カットの性質（その2）

性質2： 任意のs-tカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フロー値 f ≦ カットの容量 U(S,T)



f = 5 ≦ 16 = U(S, T)

証明：

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ U(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ U(S, T) – 0
= U(S, T)

最小カット問題

性質2： 任意のs-tカットとフローに対し
フロー値 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ カットの容量は最大フローのフロー値に対する上界を与える

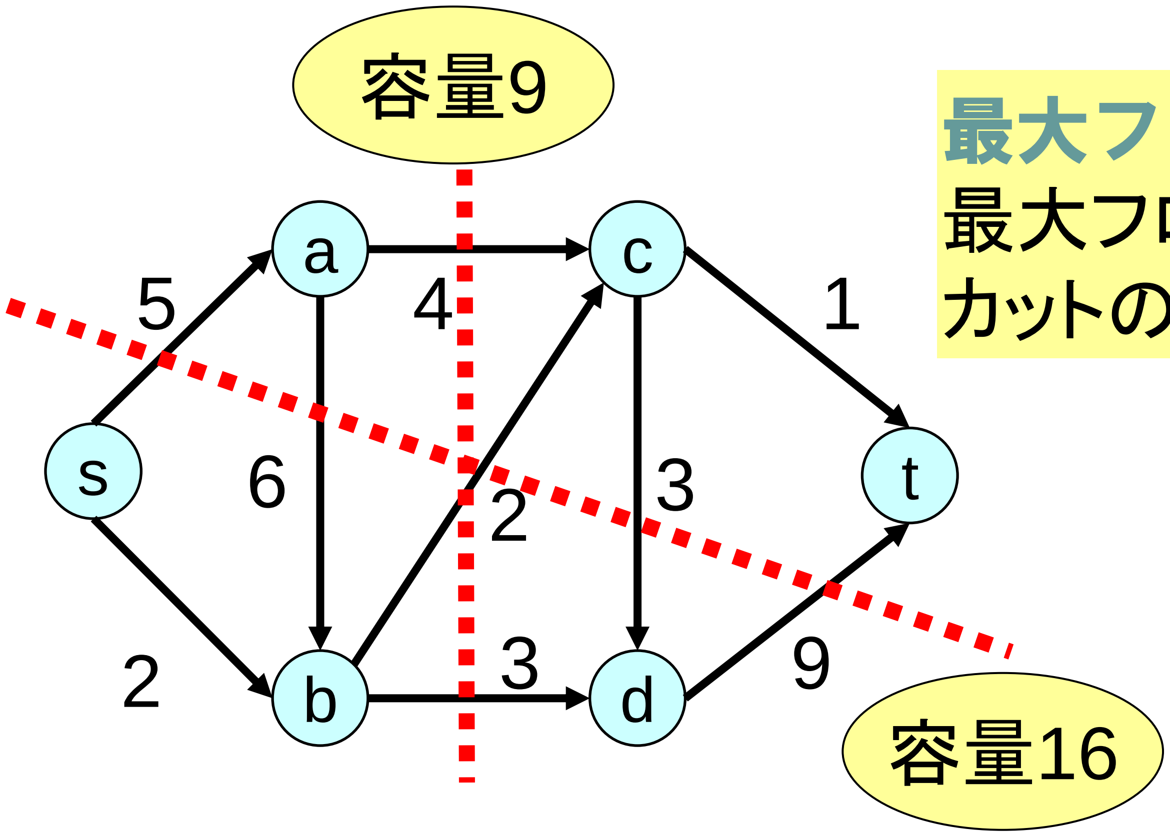
より良い上界を求めたい⇒最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）

最小カット問題は最大フロー問題の双対問題

最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



最大フロー最小カット定理
最大フローのフロー値と最小カットの容量は等しい

以降はこの定理の証明を行う

最大フロー最小カット定理の証明(その1)

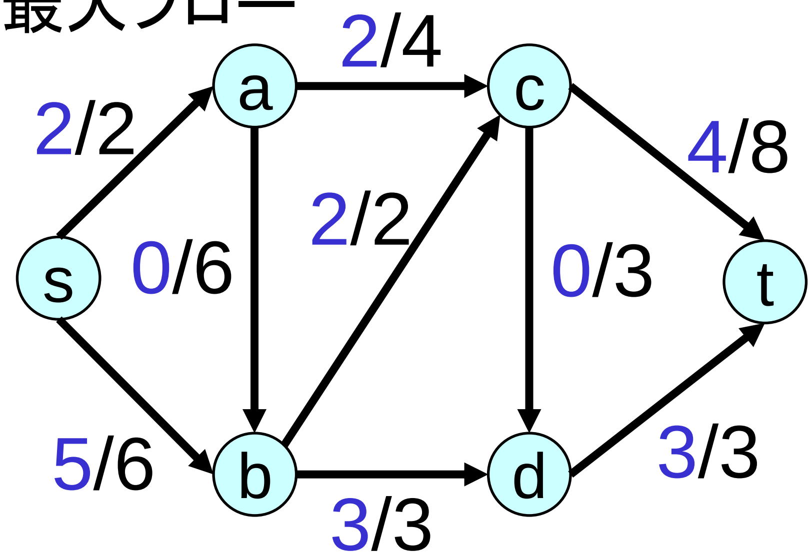
性質2： 任意のs-tカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フロー値 f ≦ カットの容量 U(S,T)

最大フロー(x_{ij} | (i,j) ∈ E)に対し,
ある s-t カット(S, T)が f = U(S, T) を満たすならば,
それは最小カット

フロー増加法の終了時に、
このような s-tカットが実際に存在することを示す

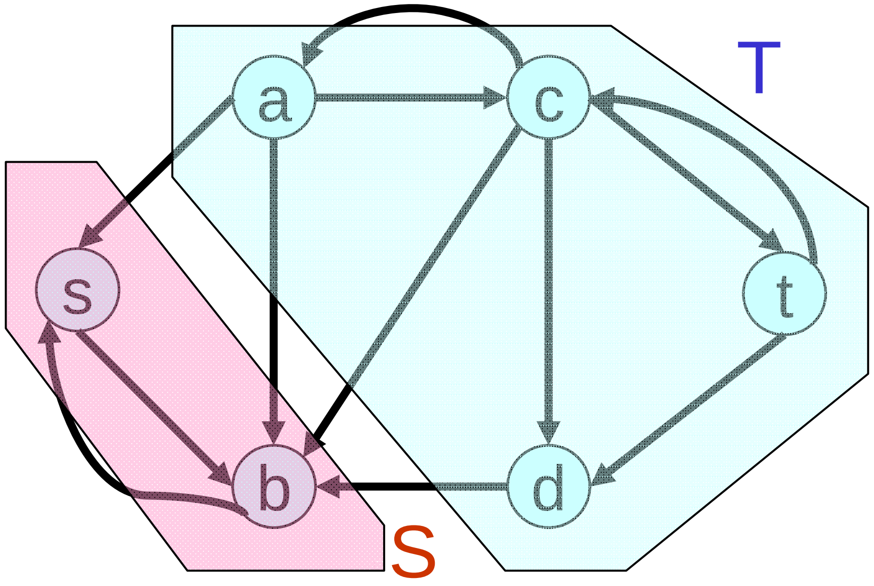
最大フロー最小カット定理の証明(その2)

最大フロー



最大フローに対して
残余ネットワークを作る

残余ネットワークには
s-t パスが存在しない

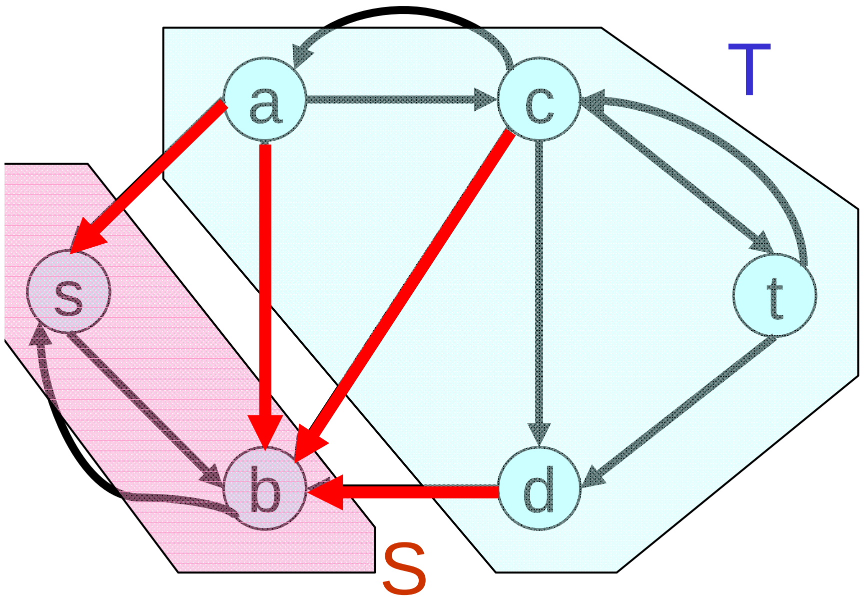


S = 残余ネットワークにおいて
s から到達可能な頂点集合

T = V – S

に対し、(S, T) は s-t カット

最大フロー最小カット定理の証明(その3)

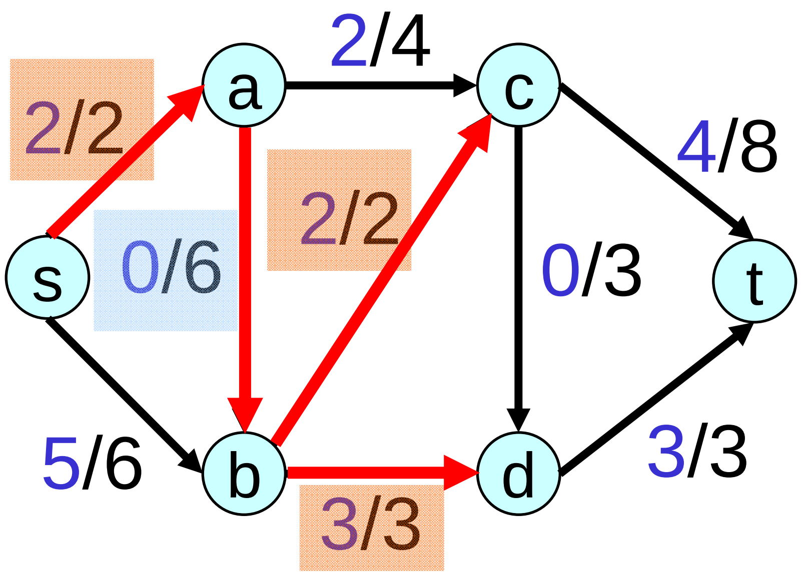


S = s から到達可能な頂点集合

T = V – S

残余ネットワークにおいて

SからTに向かう枝は存在しない

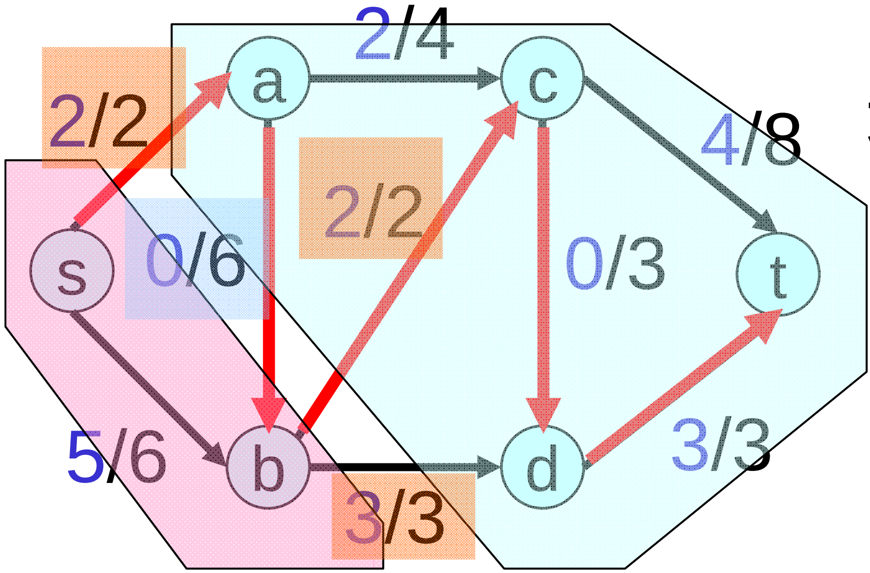


元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大フロー最小カット定理の証明（その4）



元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$

$= \Sigma\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\} = U(S, T)$

$x(T, S) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$

$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = U(S, T)$

性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore\ f = U(S, T)$ （証明終わり）

最大フロー最小カット定理

定理：フロー増加法により求められたフローは最大フロー

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

T = V – S

とすると、(S, T) は最小s-t カット

さらに　$f = U(S,T)$　が成り立つ

最大フロー最小カット定理：

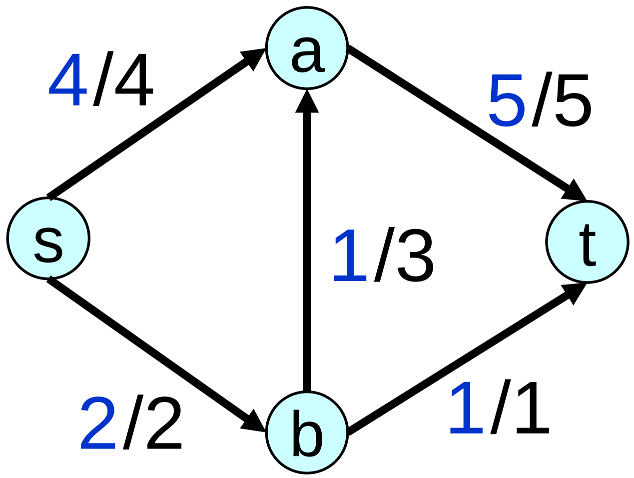
最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小s-tカット(S,T)に対し

$$f = U(S,T)$$

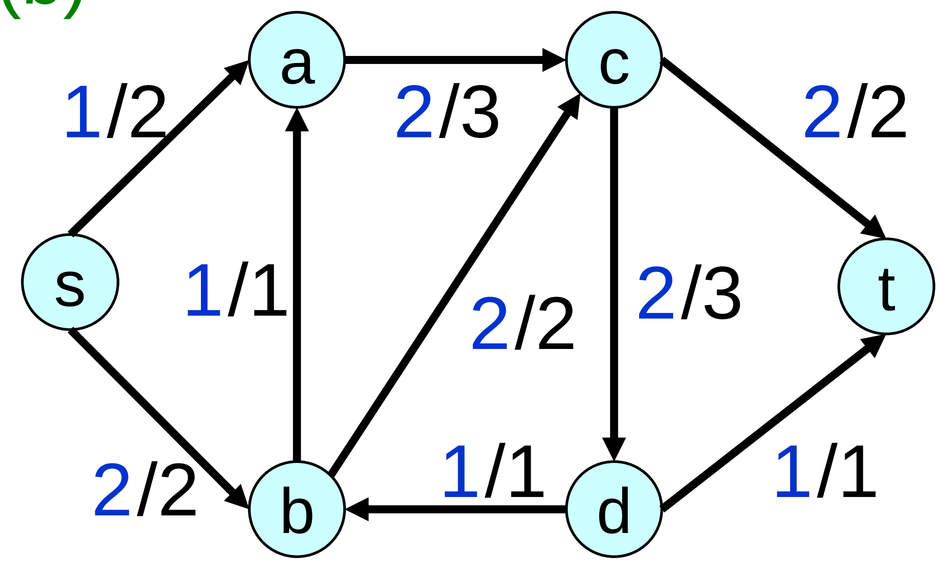
レポート問題

問１：下記の図は，最大フロー問題およびその最大フローを表す．
これらのフローに対し，残余ネットワークを書きなさい．
また，授業でやったやり方に従って最小 s-t カットを求めよ

(a)

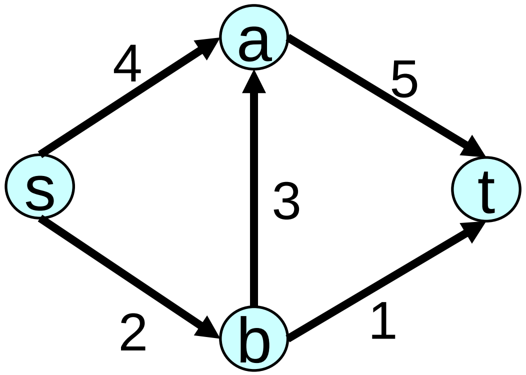


(b)



レポート問題

問２： 次のネットワークにおいて，S={s, a}, T={b, t}としたときに，x(S, T) – x(T, S) = f が成り立つことを，下記の定式化を使って証明しなさい．



最大化 f

条件

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \leq x_{sa} \leq 4,\ 0 \leq x_{sb} \leq 2,\ 0 \leq x_{ba} \leq 3,$$
$$0 \leq x_{at} \leq 5,\ 0 \leq x_{bt} \leq 1$$