数理計画法　第6回

２．４　単体法

２．４．５　2段階単体法
２．４．７　辞書の双対性

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

今日のレポート問題

- 教科書82ページ問2．16，問2．19
- 講義に対する感想、意見、要望
- 締め切り：

これまで一度もレポートを提出していない場合：

11月11日（水）午前中までに塩浦の研究室まで持参

それ以外の学生：11月19日（木）試験当日の提出でOK

中間試験について

- 日時：１１月１９日（木）午後１時より
- 受験資格者：11/11（水）午前中までにレポートを一回以上提出した学生のみ
- 教科書等の持込は不可
- 座席は指定
- 試験内容：第1回～第6回の講義内容

  問題の定式化，単体法，用語の説明，簡単な証明など

  （詳しくはWeb上の過去問を参考にしてください）

先週の内容の復習:単体法

単体法　ー　LPの解法

- 最適解を求める、または非有界性を判定
- ピボット演算を繰り返し行う
- 最小添字規則の利用

（変数の添え字が最小のものを優先して選ぶ）

⇒有限回の反復で終了

先週の復習　ー　ピボット演算

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ x_1の係数 < 0 なので

x_1 を増やす

x_1をαだけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 2$

先週の復習ーピボット演算(その2)

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$

$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x3 \geqq 0$

$\Rightarrow$

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$

- 反復回数は有限回か？

巡回(cycling) ー 同じ辞書が繰り返し現れること

復習：最小添字規則

$x_1, x_2, y_1, \cdots$

変数の添字（そえじ）

ピボット演算のとき、
最小添字規則(smallest subscript rule)を適用
　⇒　有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

復習:最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: 0→0－2α

x_5: 0→0－3α

x_6: 0→0＋5α

∴　α は最大　0

そのとき　$x_4 = x_5 = 0$

注意:x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない！

復習：最小添字規則の適用例（続き）

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

2段階単体法

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

•そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

→ 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない⇒終了

許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方

元の問題	補助問題
最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$	最小化　x_a
条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$	条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$
$\cdots$	$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$	$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$	$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_a \geqq 0$

人工変数

- 大きなx_aに対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解
- 元の問題が実行可能　⇔　補助問題の最適値＝0
- $(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

　⇔　$(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方(その1)

元問題

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geqq -1$

$x_1 + x_2 \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

補助問題

最小化 x_a

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$

$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

初期辞書

$$
\begin{aligned}
z_a &= x_a \\
z &= -x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない

補助問題の解き方(その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 && && && x_a\\
z &= 0 &&- x_1 &&- 2x_2\\
x_3 &= 1 &&- x_1 &&- x_2 &&+ x_a\\
x_4 &= -1 &&+ x_1 &&+ x_2 &&+ x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

x_a と x_4 を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4\\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→　単体法で最適解を求める

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4\\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
&\boxed{z_a = 0 + x_a}\\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4\\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4\\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a = 0$　⇒　元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- x_a が非基底変数

⇒ 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方(その4)

最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_3 を入れ替え

$$
\begin{aligned}
&\boxed{z_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4} \\
&z = -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
&x_1 = 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
&x_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4
\end{aligned}
$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方(その5)

最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
z &= -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_a &= 0 + \boxed{\tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4}
\end{aligned}
$$

係数が非ゼロの変数と x_a を入れ替え

x_3 と x_a を入れ替え ⇒

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4
\end{aligned}
$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 - x_4
\end{aligned}
$$

2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$\begin{aligned} z &= -1 - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

x_2 と x_1 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 - 2x_4 \\ x_2 &= 1 - x_1 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

x_4 と x_3 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_1 - x_3 \\ x_4 &= 0 - x_3 \end{aligned}$$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

2段階単体法の流れ

- 入力：不等式標準形のLP

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、
  元問題の実行可能性を調べる

  許容解をもたない ⇒ 終了
  許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

  非有界 ⇒ 終了
  有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ（基本定理）

辞書の双対性

主問題の辞書と双対問題の辞書の関係

→ 双対定理の証明

主問題 → 主問題の辞書

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

$z = 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0\ (i = 1,\ldots,m)$

最適⇔ $c_j \geqq 0\ (j = 1,\ldots,n)$

双対問題の辞書

双対問題(の不等式標準形) ⟶ 双対問題の辞書

最小化　$-b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

条件 $-a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m \geqq -c_1$

$\cdots$

$-a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m \geqq -c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

最小化　w

条件 $w = 0 - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$

$\cdots$

$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_{m+n} \geqq 0$

最大化　$b_1y_1 + \cdots + b_my_m$

条件　$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leqq c_1$

$\cdots$

$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

双対問題の辞書が

許容⇔$c_j \geqq 0$ $(j = 1,\ldots,n)$

最適⇔$b_i \leqq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$

2つの辞書の比較(その1)

主問題の初期辞書

$$z = 0 \quad + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$
$$x_{n+1} = - b_1 + a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n$$
$$\cdots$$
$$x_{n+m} = - b_m + a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n$$

双対問題の初期辞書

$$w = 0 \ - b_1 y_1 - \cdots - b_m y_m$$
$$y_{m+1} = c_1 - a_{11} y_1 - \cdots - a_{m1} y_m$$
$$\cdots$$
$$y_{m+n} = c_n - a_{1n} y_1 - \cdots - a_{mn} y_m$$

一般の場合

$$\begin{array}{ccc} \alpha & c_1 \cdots & c_n \\ -b_1 & a_{11} \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ -b_m & a_{m1} \cdots & a_{mn} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} -\alpha & -b_1 \cdots & -b_m \\ c_1 & -a_{11} \cdots & -a_{m1} \\ & \cdots & \\ c_n & -a_{1n} \cdots & -a_{mn} \end{array}$$

行列を転置して
一部の符号を反転

2つの辞書の比較(その2)

主問題の辞書

$$z = \alpha + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$
$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$\cdots$$
$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

双対問題の辞書

$$w = -\alpha - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$$
$$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$$
$$\cdots$$
$$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0$ $(\forall i)$

⇔双対問題の辞書が最適

主問題の辞書が最適⇔$c_j \geqq 0$ $(\forall j)$

⇔双対問題の辞書が許容

双対定理の証明

主問題に最適解が存在

⇒　主問題の許容かつ最適な辞書が存在

$b_i \leqq 0\ (\forall i)$, $c_j \geqq 0\ (\forall j)$

α	c_1	$\cdots$	c_n
$-b_1$	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
		$\cdots$	
$-b_m$	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}

対応する双対問題の辞書を作成

⇒　許容かつ最適な辞書になっている

⇒　双対問題に最適解が存在、

目的関数値は共にα

$-\alpha$	$-b_1$	$\cdots$	$-b_m$
c_1	$-a_{11}$	$\cdots$	$-a_{m1}$
		$\cdots$	
c_{mn}	$-a_{1n}$	$\cdots$	$-a_{mn}$

その他のピボット規則

- 最大係数規則
  - z の式での係数が最小（絶対値が最大）の非基底変数を選ぶ
- 最大改善規則
  - 一回のピボット演算での目的関数値の減少量が最大となるように，非基底変数を選ぶ

- いずれの方法とも
  - 実用的には良い性能（反復回数が少ない）
  - 巡回を防ぐとは限らない

単体法の反復回数

- 実験的には反復回数は少ない
  - 反復回数 ≦ 制約の数×３
  - 変数の数が増えても，反復回数はあまり増えない（log n)
- しかし，指数回の反復回数を要する問題例が存在
  - 反復回数が 2^n-1 となる例がある（Klee & Minty 1972）
- でも，反復回数が多い問題に出くわすことは滅多にない

指数回の反復を要する問題例

最大化 $\displaystyle \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$

条件 $\displaystyle \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$

n = 4 のときは以下の通り

最大化 $1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$

条件
$$
\begin{aligned}
& x_1 \leq 0 \\
& 2(10x_1) + x_2 \leq 100 \\
& 2(100x_1 + 10x_2) + x_3 \leq 10000 \\
& 2(1000x_1 + 100x_2 + 10x_3) + x_4 \leq 1000000 \\
& x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$