

数理計画法 第6回

2.4 単体法

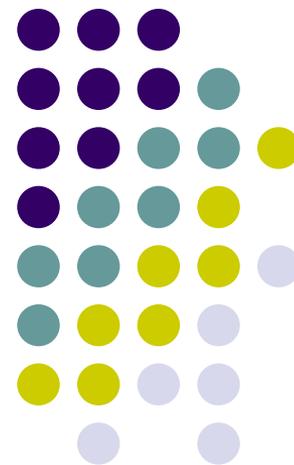
2.4.5 2段階単体法

2.4.7 辞書の双対性

担当： 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



今日のレポート問題



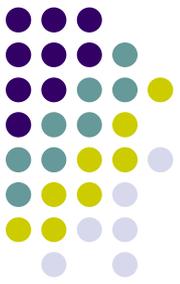
- 教科書82ページ問2. 16, 問2. 19
- 講義に対する感想、意見、要望
- 締め切り:

これまで一度もレポートを提出していない場合:

11月11日(水)午前中までに塩浦の研究室まで持参

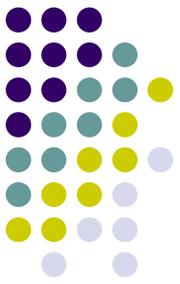
それ以外の学生:11月19日(木)試験当日の提出でOK

中間試験について



- 日時: 11月19日(木)午後1時より
- 受験資格者: 11/11(水)午前中までにレポートを
一回以上提出した学生のみ
- 教科書等の持込は不可
- 座席は指定
- 試験内容: 第1回～第6回の講義内容
問題の定式化, 単体法, 用語の説明, 簡単な証明など
(詳しくはWeb上の過去問を参考にしてください)

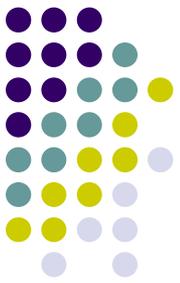
先週の内容の復習: 単体法



単体法 — LPの解法

- 最適解を求める、または非有界性を判定
 - **ピボット演算**を繰り返し行う
 - 最小添字規則の利用
(変数の添え字が最小のものを優先して選ぶ)
- ⇒ 有限回の反復で終了

先週の復習 — ピボット演算



許容辞書

$$\begin{aligned}z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3\end{aligned}$$

基底解 $(0, 0, 0, 4, 4, 1)$

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい
 $\Rightarrow x_1$ の係数 < 0 なので
 x_1 を増やす

x_1 を α だけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$$(\alpha, 0, 0, 4 - 2\alpha, 4 - 2\alpha, 1 + 4\alpha)$$

許容性を満たすためには

$$\alpha \leq 2$$

先週の復習ーピボット演算(その2)



$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$, $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

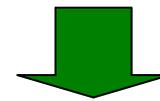
基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

単体法の問題点



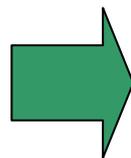
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

$$\text{最小化 } -2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{条件 } -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-2x_1 \quad -4x_3 \geq -4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad -4x_3$$

- 反復回数は有限回か？

巡回(cycling) — 同じ辞書が繰り返し現れること

復習: 最小添字規則



x_1, x_2, y_1, \dots

変数の添字(そえじ)

ピボット演算のとき、

最小添字規則(smallest subscript rule)を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る
変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る
変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

復習: 最小添字規則の適用例



入る変数の候補

x_1 はどれだけ増やせるか?

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$

$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

$\therefore \alpha$ は最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

出る
変数
の候補

	x_1	x_2	x_3	
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

注意: x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない!

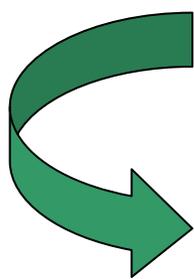
復習: 最小添字規則の適用例(続き)



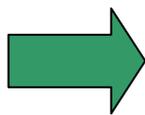
入る変数の候補

出る変数の候補

	x_1	x_2	x_3	
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2



	x_4	x_2	x_3	
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2



最適

	x_4	x_2	x_1	
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1



2段階単体法

単体法の問題点

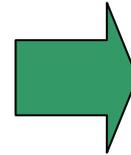
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geq -4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？



2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

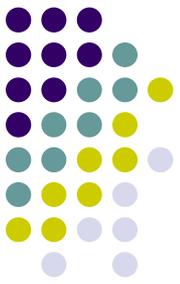
1段階目: 実行可能性の判定

- **補助問題**を作成
 - 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
 - 許容解をもたない⇒終了
 - 許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方



元の問題



補助問題

人工変数

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$
条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$
...
 $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化 x_a
条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_a \geq b_1$
...
 $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_a \geq b_m$
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_a \geq 0$

- 大きな x_a に対して (x_1, \dots, x_n, x_a) は許容解
- 元の問題が実行可能 \Leftrightarrow 補助問題の最適値 = 0
- (x_1, \dots, x_n) : 元の問題の許容解
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方(その1)



元問題



補助問題

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geq -1$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

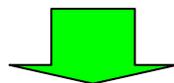
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

最小化 x_a

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geq -1$

$$x_1 + x_2 + x_a \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$$



初期辞書

$$z_a = \quad \quad \quad x_a$$

$$z = \quad -x_1 - 2x_2$$

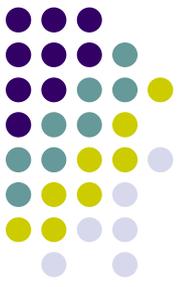
$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 - x_1 + x_2 + x_a$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので
許容辞書ではない

補助問題の解き方(その2)



許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$z_a = 0 \quad x_a$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を

基底から出す



x_a と x_4 を入れ替え

⇒ 許容辞書が得られる

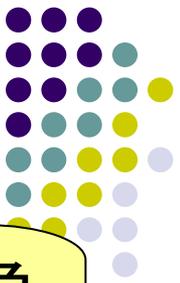
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

補助問題の解き方(その3)



許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負
なので最適

$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

x_1 と x_a を
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

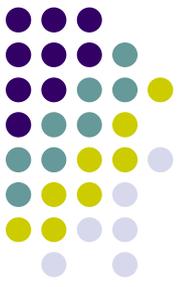
• 補助問題の最適値 $z_a = 0 \Rightarrow$ 元問題は実行可能

• 現在の基底解 $(1, 0, 0, 0)$: 元問題の許容解

• x_a が非基底変数

\Rightarrow 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方(その4)



最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

x_1 と x_3 を
入れ替え



$$z_a = 0 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2} x_3 - x_2 - \frac{1}{2} x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} x_3 - x_2 + \frac{1}{2} x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方(その5)



最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$z_a = 0 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2} x_3 - x_2 - \frac{1}{2} x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} x_3 - x_2 + \frac{1}{2} x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$$

x_3 と x_a を
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると

元問題の許容辞書

係数が非ゼロの
変数と x_a を入れ替え

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

2段階単体法の2段階目



1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

x_2 と x_1 を
入れ替え



$$z = -2 + x_1 - 2x_4$$

$$x_2 = 1 - x_1 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

x_4 と x_3 を
入れ替え



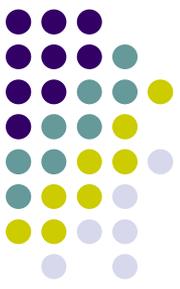
$$z = -2 + x_1 + 2x_3$$

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = 0 - x_3$$

最適解 $(0, 1, 0, 0)$ が得られた

2段階単体法の流れ



- 入力: 不等式標準形のLP

1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、

元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない \Rightarrow 終了

許容解をもつ \Rightarrow 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界 \Rightarrow 終了

有界 \Rightarrow 最適解を出力

∴ 実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

辞書の双対性

主問題の辞書と双対問題の辞書の関係

→ 双対定理の証明



主問題



主問題の辞書

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

主問題の辞書が許容 $\Leftrightarrow b_i \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$)

最適 $\Leftrightarrow c_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$)

双対問題の辞書



双対問題(の不等式標準形) \longrightarrow 双対問題の辞書

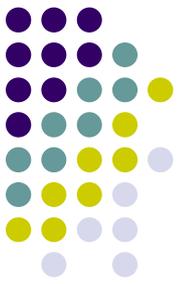
$$\begin{aligned} & \text{最小化 } -b_1y_1 - \cdots - b_my_m \\ & \text{条件 } -a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m \geq -c_1 \\ & \quad \dots \\ & \quad -a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m \geq -c_n \\ & \quad y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } w \\ & \text{条件 } w = 0 - b_1y_1 - \cdots - b_my_m \\ & \quad y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m \\ & \quad \dots \\ & \quad y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m \\ & \quad y_1 \geq 0, \dots, y_{m+n} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } b_1y_1 + \cdots + b_my_m \\ & \text{条件 } a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & \quad \dots \\ & \quad a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ & \quad y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題の辞書が
許容 $\Leftrightarrow c_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n)$
最適 $\Leftrightarrow b_i \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)$

2つの辞書の比較(その1)



主問題の初期辞書

$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

双対問題の初期辞書

$$w = 0 - b_1y_1 - \dots - b_my_m$$

$$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \dots - a_{m1}y_m$$

...

$$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \dots - a_{mn}y_m$$

一般の場合

$$\alpha \quad c_1 \quad \dots \quad c_n$$

$$-b_1 \quad a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}$$

...

$$-b_m \quad a_{m1} \quad \dots \quad a_{mn}$$



行列を転置して
一部の符号を反転

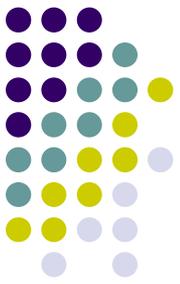
$$-\alpha \quad -b_1 \quad \dots \quad -b_m$$

$$c_1 \quad -a_{11} \quad \dots \quad -a_{m1}$$

...

$$c_n \quad -a_{1n} \quad \dots \quad -a_{mn}$$

2つの辞書の比較(その2)



主問題の辞書

$$z = \alpha + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

双対問題の辞書

$$w = -\alpha - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$$

$$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$$

...

$$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$$

主問題の辞書が許容 $\Leftrightarrow b_i \leq 0 (\forall i)$

\Leftrightarrow 双対問題の辞書が最適

主問題の辞書が最適 $\Leftrightarrow c_j \geq 0 (\forall j)$

\Leftrightarrow 双対問題の辞書が許容

双対定理の証明



主問題に最適解が存在

⇒ 主問題の許容かつ最適な辞書が存在

$$b_i \leq 0 (\forall i), c_j \geq 0 (\forall j)$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha & c_1 & \cdots & c_n \\ -b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & \\ -b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

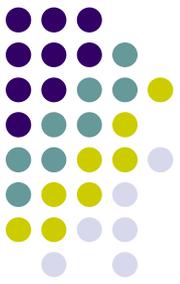
対応する双対問題の辞書を作成

⇒ 許容かつ最適な辞書になっている

⇒ 双対問題に最適解が存在、

目的関数値は共に α

$$\begin{array}{cccc} -\alpha & -b_1 & \cdots & -b_m \\ c_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{m1} \\ & & \cdots & \\ c_{mn} & -a_{1n} & \cdots & -a_{mn} \end{array}$$



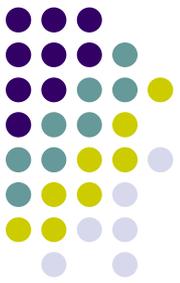
その他のピボット規則

- **最大係数規則**
 - z の式での**係数が最小** (絶対値が最大) の非基底変数を選ぶ
- **最大改善規則**
 - 一回のピボット演算での**目的関数値の減少量が最大**となるように, 非基底変数を選ぶ
- **いずれの方法とも**
 - 実用的には良い性能 (反復回数が少ない)
 - 巡回を防ぐとは限らない



単体法の反復回数

- 実験的には反復回数は少ない
 - 反復回数 \leq 制約の数 $\times 3$
 - 変数の数が増えても、反復回数はあまり増えない ($\log n$)
- しかし、指数回の反復回数を要する問題例が存在
 - 反復回数が $2^n - 1$ となる例がある (Klee & Minty 1972)
- でも、反復回数が多い問題に出くわすことは滅多にない



指数回の反復を要する問題例

最大化
$$\sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

条件
$$\left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

n = 4 のときは以下の通り

最大化 $1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$

条件 $x_1 \leq 0$

$$2(10x_1) + x_2 \leq 100$$

$$2(100x_1 + 10x_2) + x_3 \leq 10000$$

$$2(1000x_1 + 100x_2 + 10x_3) + x_4 \leq 1000000$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$