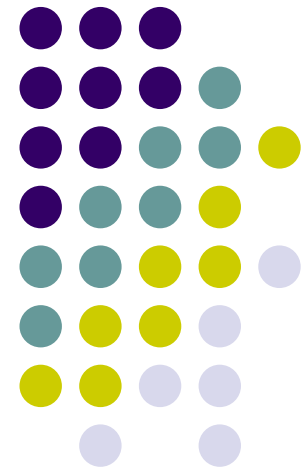


# 数理計画法 第5回

## 2.4 単体法

担当： 塩浦昭義 Akiyoshi Shioura  
(情報科学研究科 准教授)  
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp





## 今後の予定

- 10／29 線形計画5回目
- 11／5 線形計画6回目
- 11／12 3年生研究室見学会(確定)
- 11／19 中間試験(確定)

## 2.4 単体法(simplex method)



- LPの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

# 辞書(その1)

## 問題の変形

不等式標準形  $\Rightarrow$  一種の等式標準形

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化  $z$

条件  $z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

...

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$

$x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる  $\rightarrow$  **辞書(dictionary)**



# 辞書(その2)

## 問題の変形

不等式標準形  $\Rightarrow$  一種の等式標準形

最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最小化  $z$

条件  $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0$$

辞書



# 辞書に関する用語



$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

非基底変数  
(nonbasic variable)

右辺の変数

基底変数(basic variable): 左辺に表れる変数

基底解(basic solution): 非基底変数を0としたときの解

(許容とは限らない)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$



基底解は(0,0,0,4,4,1)

# 辞書に関する用語(その2)



許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書

⇔ 基底解の各成分が非負

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, 4, 4)

⇒ 許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, -4, 4)

⇒ 許容辞書ではない

# 辞書の行列表現

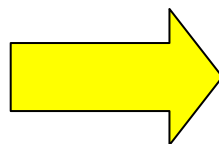


辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$



0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4



# 基底解の更新方法:ピボット演算



**ピボット演算**(pivot operation): より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値  $z = 0$

解を変化させて  $z$  を減らしたい  
 $\Rightarrow x_1$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_1$  を増やす

$x_1$  を  $\alpha$  だけ増やすと

目的関数値  $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4 - 2\alpha, 4 - 2\alpha, 1 + 4\alpha)$

許容性を満たすためには  $\alpha \leq 2$

# ピボット演算(その2)



$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$  とすると

解は(2,0,0,0,0,9),  $z = -4$

とくに、基底変数  $x_4 = 4 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底( $x_1, x_5, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_3$ )

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

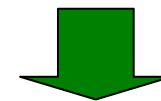
$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_1$ を基底に入れる

$x_4$ を基底から出す



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

# ピボット演算2回目(その1)



$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

z を減らしたい

$$x_1 = 2 + (\frac{1}{2})x_4 - x_2 + (\frac{1}{2})x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$\Rightarrow x_3$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_3$  を増やす

$x_3$  を  $\alpha$  だけ増やすと

基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$

目的関数値  $z = -4 - 2\alpha$

目的関数値  $z = -4$

解は

$$(2 + (\frac{1}{2})\alpha, 0, \alpha, 0, 0 - 5\alpha, 9 + 3\alpha)$$

許容性を満たすためには

$$\alpha \leq 0$$

# ピボット演算2回目(その2)



$$\begin{aligned} z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 & x_3 = 0 \rightarrow 0 \text{ とすると} \\ x_1 &= 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3 & \text{解は}(2, 0, 0, 0, 0, 9), \quad z = -4 \\ x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 & \text{とくに、基底変数 } x_5 = 0 \rightarrow 0 \\ x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3 & \end{aligned}$$

基底と非基底の入れ替え

基底( $x_1, x_3, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_5$ )

$x_3$ を基底に入れる

$x_5$ を基底から出す

$$\begin{aligned} z &= -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

# ピボット演算に関する用語



- 1回目のピボット演算

基底解  $(0,0,0,4,4,1) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

**非退化(nondegenerate)**: 基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

基底解  $(2,0,0,0,0,9) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

**退化(degenerate)**: 基底解が変化しない

# 最適性の判定



$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

$z$  の式 of 非基底変数の係数がすべて非負



任意の許容解において  $x_4, x_2, x_5$  は非負なので  $z \geq -4$



現在の基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$  は  $z = -4$  なので最適解

# 非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値  $z = 0$

$x_1$ の係数 =  $-2 < 0$  なので  
 $x_1$ を増やす  $\Rightarrow z$ が減る

$x_1$ を $\alpha$ 増やすと

解は

$$(\alpha, 0, 0, 4 + 2\alpha, 4 + 2\alpha, 1 + 4\alpha)$$

目的関数値  $z = -2\alpha$

$\alpha$ を任意に増やしても解は許容  
 $\Rightarrow$  非有界



# 単体法の流れ



- **入力**: 許容辞書 (および基底)
- **出力**: 有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

## ステップ1: 最適性判定

$z$  の等式の右辺の係数が全て非負  $\Rightarrow$  **最適解**  
ある係数が負  $\Rightarrow$  **基底に入る変数  $x_s$**  にする

## ステップ2: 非有界性判定、ピボット演算

変数  $x_s$  をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる  $\Rightarrow$  **非有界**

それ以外  $\Rightarrow x_s$  を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を**基底から出る変数  $x_t$**  にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え



# 単体法の問題点



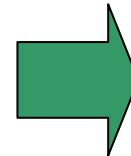
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3$

$-2x_1 \quad -4x_3 \geq -4$

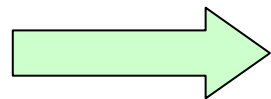
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$



$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad -4x_3$



対処法は次回の講義で説明

- 反復回数は有限回か？

**巡回(cycling)** — 同じ辞書が繰り返し現れること

# 巡回の例



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

	$x_1$	$x_6$	$x_3$	
$z$	0	$7/3$	$-2/3$	$1/3$
$x_4$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_5$	0	$-14/3$	$1/3$	$-5/3$
$x_2$	0	$5/3$	$-1/3$	$2/3$

	$x_1$	$x_6$	$x_4$	
$z$	0	2	-1	-1
$x_3$	0	-1	-1	-3
$x_5$	0	-3	2	5
$x_2$	0	1	-1	-2

	$x_5$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	$1/3$	$7/3$	$-2/3$
$x_4$	0	$2/3$	$5/3$	$-1/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_6$	0	$-5/3$	$-14/3$	$1/3$

	$x_5$	$x_2$	$x_4$	
$z$	0	-1	-1	2
$x_3$	0	2	5	-3
$x_1$	0	-1	-2	1
$x_6$	0	-1	-3	-1

	$x_5$	$x_6$	$x_4$	
$z$	0	$-2/3$	$1/3$	$7/3$
$x_3$	0	$1/3$	$-5/3$	$-14/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$2/3$	$5/3$
$x_2$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$



# 単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると、辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個
  
- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない→辞書が無限に生成される
  - 同じ辞書が何回も現れる
  - 巡回が起こっている

注意: 巡回が起こっているときは目的関数値が変化しない

# 最小添字規則



ピボット演算のとき、

最小添字規則(smallest subscript rule)を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る  
変数の候補

- ステップ1にて**係数が負の非基底変数**が複数存在

⇒ **添字最小**のものを選択

基底から出る  
変数の候補

- ステップ2にて**値が0に減少する基底変数**が複数存在

⇒ **添字最小**のものを選択

# 最小添字規則の適用例



入る変数の候補

$x_1$  はどれだけ増やせるか?

出る変数の候補

		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$
$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

$\therefore \alpha$  は最大 0  
そのとき  $x_4 = x_5 = 0$

注意:  $x_6$  は増加するので、  
出る変数の候補ではない!

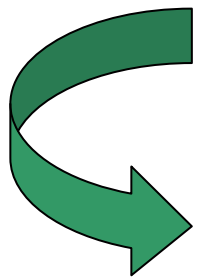
# 最小添字規則の適用例(つづき)



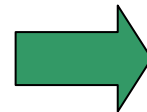
入る変数の候補

出る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-1	2
$x_4$	0	-2	1
$x_5$	0	-3	-1
$x_6$	0	5	-3



	$x_4$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	$1/2$	$3/2$
$x_1$	0	$-1/2$	$1/2$
$x_5$	0	$3/2$	$-5/2$
$x_6$	0	$-5/2$	$-1/2$



最適

	$x_4$	$x_2$	$x_1$
$z$	0	1	1
$x_3$	0	-1	-2
$x_5$	0	1	-1
$x_6$	0	-2	1



# その他のピボット規則

- **最大係数規則**
  - $z$  の式での**係数が最小** (絶対値が最大) の非基底変数を選ぶ

入る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-3	-1	-2
$x_4$	3	-2	1	-1
$x_5$	1	-3	1	-1
$x_6$	4	5	-1	2



# その他のピボット規則

- **最大改善規則**

- 一回のピボット演算での **目的関数値の減少量が最大** となるように, 非基底変数を選ぶ

入る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-3	-2
$x_4$	3	-2	-1
$x_5$	1	-3	-1
$x_6$	4	5	2

	増加量	変数の	$z$ の式での	目的関数値
		係数		の減少量
$x_1 \rightarrow$	1/3	$\times$	$(-3)$	$= -1$
$x_2 \rightarrow$	4	$\times$	$(-1)$	$= -4$
$x_3 \rightarrow$	1	$\times$	$(-2)$	$= -2$





# その他のピボット規則

- **最大係数規則**
  - $z$  の式での**係数が最小** (絶対値が最大) の非基底変数を選ぶ
- **最大改善規則**
  - 一回のピボット演算での**目的関数値の減少量が最大**となるように, 非基底変数を選ぶ
- **いずれの方法とも**
  - 実用的には良い性能 (反復回数が少ない)
  - 巡回を防ぐとは限らない



# 単体法の反復回数

- 実験的には反復回数は少ない
  - 反復回数  $\leq$  制約の数  $\times 3$
  - 変数の数が増えても、反復回数はあまり増えない ( $\log n$ )
- しかし、指数回の反復回数を要する問題例が存在
  - 反復回数が  $2^n - 1$  となる例がある (Klee & Minty 1972)
- でも、反復回数が多い問題に出くわすことは滅多にない



# 指数回の反復を要する問題例

最大化  $\sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$

条件  $\left( 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

n = 4 のときは以下の通り

最大化  $1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$

条件  $x_1 \leq 0$

$2(10x_1) + x_2 \leq 100$

$2(100x_1 + 10x_2) + x_3 \leq 10000$

$2(1000x_1 + 100x_2 + 10x_3) + x_4 \leq 1000000$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$

# 今週のレポート問題



- 教科書82ページ問2. 14
- 教科書82ページ問2. 15
- 次のLP(許容辞書)

を単体法で解け

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

いずれの問題についても、単体法の各反復における辞書、および基底から出る変数、入る変数を明記すること

締め切り 11月5日(木)