

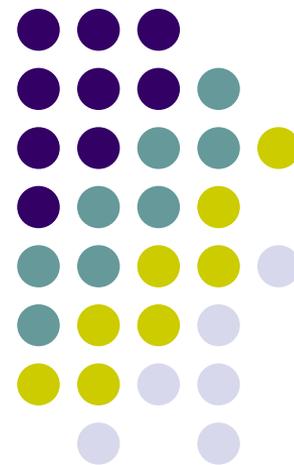
数理計画法 第4回

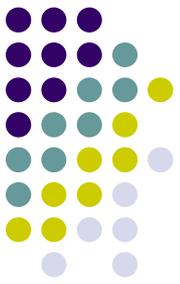
2.3 諸定理

2.4 単体法

担当： 塩浦昭義 Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

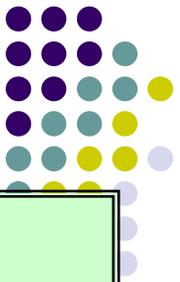




今後の予定

- 10／22 線形計画4回目(今日)
- 10／29 線形計画5回目
- 11／5 ネットワーク最適化1回目
- 11／12 3年生研究室見学会(確定)
- 11／19 中間試験(確定)

復習：弱双対定理



定理2. 2 (弱双対定理)

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

系2. 2

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

⇒ \mathbf{x} : 主問題の最適解、 \mathbf{y} : 双対問題の最適解

復習：基本定理，双対定理



定理2. 1 (基本定理)

任意のLPに対し、

実行可能かつ有界 \Rightarrow **最適解**が存在

定理2. 3:

主問題または双対問題が最適解をもつ

\Rightarrow 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

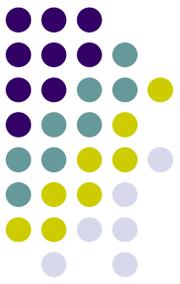
証明 \rightarrow 後日

復習： 主問題と双対問題の答えの組合せ



| | | | 双対問題 | | |
|-----|-------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | 実行可能 | | 実行不可能 |
| | | | 最適解 | 非有界 | |
| 主問題 | 実行可能 | 最適解 | ○ (双対定理) | × (系2. 1) | × (双対定理) |
| | | 非有界 | × (系2. 1) | × (系2. 1) | ○ (系2. 1) |
| | 実行不可能 | × (双対定理) | ○ (系2. 1) | ○ | |

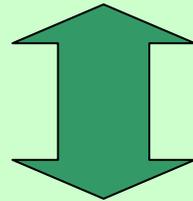
相補性定理 (complementarity slackness theorem)



定理 2.4:

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

x 、 y は最適解



相補性条件
(complementarity
slackness condition)

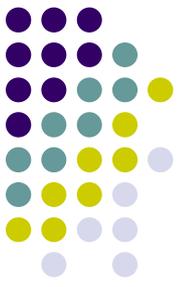
各 $j = 1, \dots, n$ について

$\sum_i a_{ij} y_i \leq c_j$ と $x_j \geq 0$ のどちらかは等号成立

各 $i = 1, \dots, m$ について

$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ と $y_i \geq 0$ のどちらかは等号成立

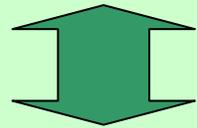
相補性定理の証明



x: 主問題の許容解

y: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解



$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j \quad \text{または} \quad x_j = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \text{または} \quad y_i = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \dots, m)$$

証明: 弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

x、**y**が最適 \Leftrightarrow 最初の項 = 最後の項

$$\Leftrightarrow (\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j, (\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i \quad \Leftrightarrow \text{相補性}$$

2. 4 単体法(simplex method)

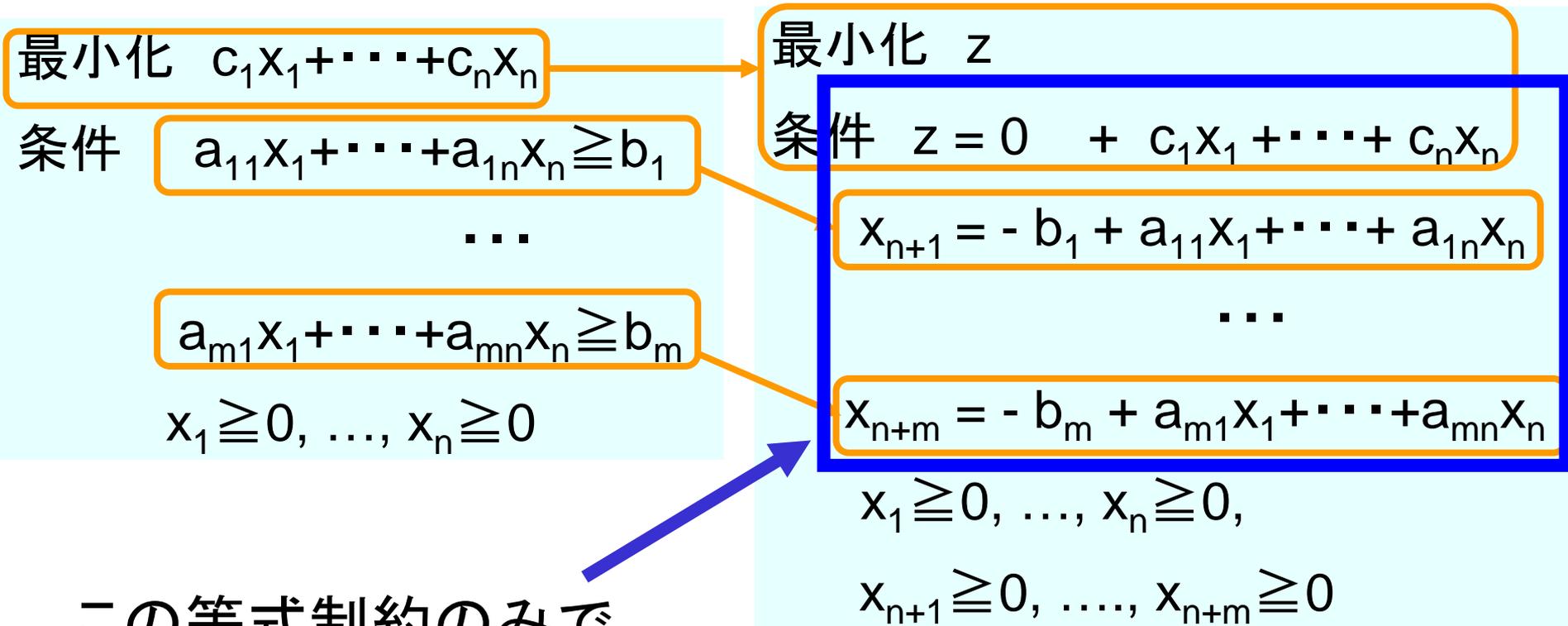
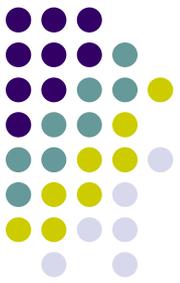


- LPの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形 \Rightarrow 一種の等式標準形



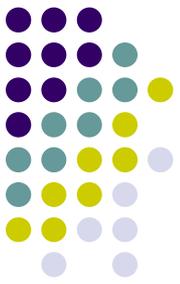
この等式制約のみで

問題を表現できる \rightarrow 辞書(dictionary)

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形 \Rightarrow 一種の等式標準形



最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最小化 z

条件 $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0$$

辞書

辞書に関する用語



$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数 (basic variable): 左辺に表れる変数

基底解 (basic solution): 非基底変数を0としたときの解

(許容とは限らない)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$



基底解は(0,0,0,4,4,1)

辞書に関する用語(その2)



許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書

⇔ 基底解の各成分が非負

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, 4, 4)

⇒ 許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, -4, 4)

⇒ 許容辞書ではない