数理計画法　第4回

２．３　諸定理
２．４　単体法

担当：　塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

今後の予定

- １０／２２ 線形計画4回目（今日）
- １０／２９ 線形計画5回目
- １１／５ ネットワーク最適化1回目
- １１／１２　3年生研究室見学会（確定）
- １１／１９ 中間試験（確定）

復習：弱双対定理

定理2．2（弱双対定理）

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

系2．2

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒　**x**: 主問題の最適解、**y**：双対問題の最適解

復習：基本定理，双対定理

定理２．１（基本定理）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

定理２．３：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

復習：
主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○（双対定理）	×（系2．1）	×（双対定理）
		非有界	×（系2．1）	×（系2．1）	○（系2．1）
	実行不可能		×（双対定理）	○（系2．1）	○

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理2．4：

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解

$\Updownarrow$

相補性条件
(complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\Sigma_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\Sigma_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

$\Sigma_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　($\forall j = 1, 2, \ldots, n$)

$\Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, m$)

証明:　　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\Sigma_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\Sigma_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　⇔　相補性

２．４　単体法(simplex method)

- ＬＰの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化　z

条件　$z = 0 \quad + \; c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　**辞書(dictionary)**

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最小化　z

条件

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$$z = \quad 0 \quad + \; c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 \; + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$\cdots$$

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable)：左辺に表れる変数

基底解(basic solution)：非基底変数を0としたときの解
（許容とは限らない）

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

→ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary)：

対応する基底解が許容解の辞書

⇔　基底解の各成分が非負

$$\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3 \end{aligned}$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒　許容辞書

$$\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3 \end{aligned}$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒　許容辞書ではない