数理計画法　第3回

２．３　諸定理

担当：　塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習：主問題と双対問題

主問題(primal problem)

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

双対問題(dual problem)

最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

主問題の i 番目の不等式
$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqq b_i$

対応

双対問題の i 番目の変数
$y_j \geqq 0$

主問題の j 番目の変数
$x_j \geqq 0$

対応

双対問題の j 番目の不等式
$a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\cdots+a_{mj}y_m \leqq c_j$

諸定理 ― LPの基本定理

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能⇔許容解が存在する
- 実行不可能⇔許容解が存在しない

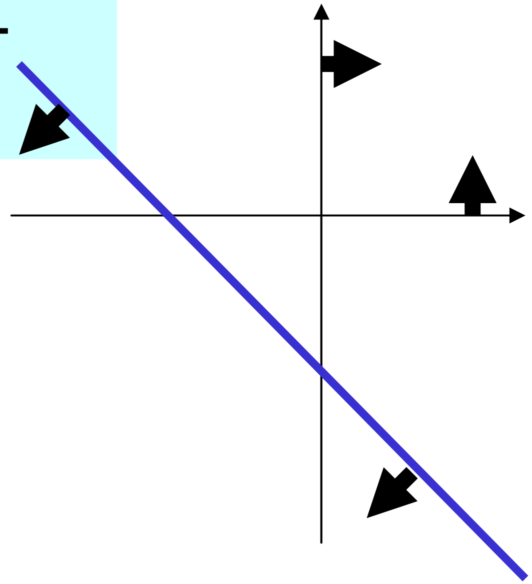
最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

実行不可能



LPの基本定理(その2)

定義:実行可能なLPは (最小化の場合)

- 有界 ⇔ 任意の許容解の目的関数値が
  ある定数より大きい
- 非有界 ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

最小化 $-x - y$
条件 $x + y \geqq 0$
$x, y \geqq 0$

有界

目的関数値≧0

非有界

任意の$\alpha>0$に対し(α, α)は許容解

目的関数値$= -2\alpha$

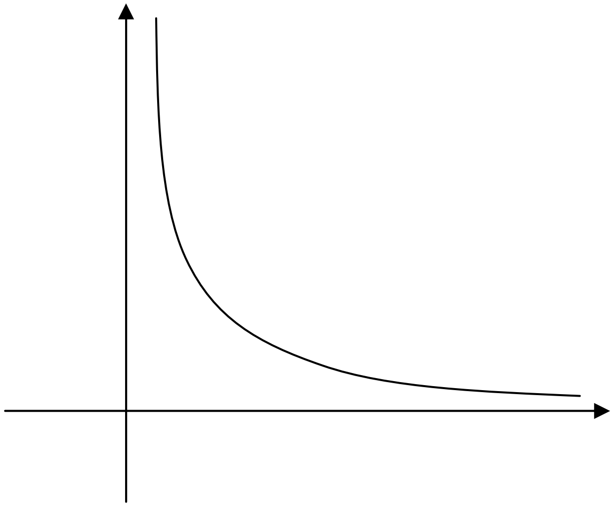
LPの基本定理(その3)

定理2．1(基本定理)
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化　y
条件　$xy \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

最適値＝0
でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理(その1)

定理2．2(弱双対定理)

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理(その2—証明)

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件

$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

…

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件

$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

…

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理(その3ー系)

系2．1
主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能
双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対:実行可能⇒主:有界） を示す
双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、 $\alpha = \Sigma b_i y_i$
弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha$ 　∴ 主問題は有界

弱双対定理(その4ー系)

系2．2
x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**:双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理2．2)を使って証明すること

弱双対定理(その5ー系)

例2．3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$$
$$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$$
$$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$$
$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$$
$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒　系2．2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理２．３:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○（双対定理）	×（系2．1）	×（双対定理）
		非有界	×（系2．1）	×（系2．1）	○（系2．1）
	実行不可能		×（双対定理）	○（系2．1）	○

今週のレポート問題

- 教科書81ページ問2．８（系2.2の証明）
- 次のような線形計画問題の例を示せ.
  - （1）主問題，双対問題共に最適解をもつ
  - （2）主問題は非有界，双対問題は実行不可能
- 教科書81ページ問2．１１
- 教科書81ページ問2．１２

締め切り　10月22日（木）

提出は授業開始後10分以内に.

それ以降は受け取りません.

情報科学研究科の私の研究室に持ってきてもOK.