

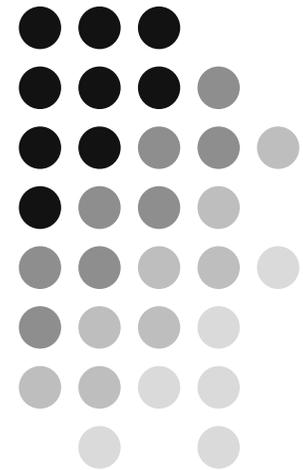
数理計画法 第1回

1. 数理計画問題
2. 線形計画

担当： 塩浦昭義

情報科学研究科 徳山・塩浦研究室 准教授

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



「数理計画法」の授業の目的

- 数理計画問題、およびその解法について学ぶ

使用する教科書

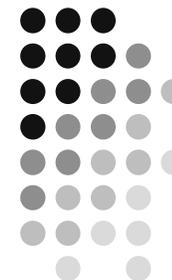
☆ 田村明久、村松正和著

「最適化法」、工系数学講座17巻

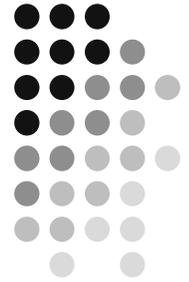
共立出版、2002年

☆ 適宜資料を配布

教科書を生協で購入しておいてください



成績評価の方法および基準



- 中間試験(50点)
- 期末試験(50点)
- 演習レポートの提出状況(最大20点程度)

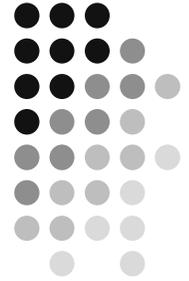
により評価

- 60点以上で合格
- 出席点は全く考慮しない
- レポート未提出者は試験の受験は不可

レポートの
提出時間は
13:10まで
それ以降は
0点扱い

授業に関する情報のページ

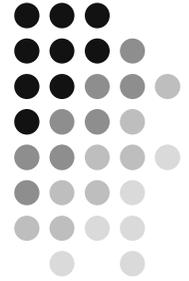
<http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/>



単位が不可となる条件

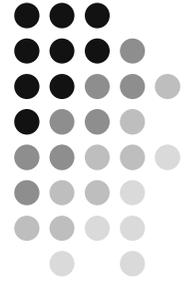
- 線形計画に関するレポートを一度も提出しない
- 中間試験の得点が25点未満
- ネットワーク計画, 非線形計画に関するレポートを一度も提出しない
- 期末試験の得点が25点未満
- 総得点が60点未満

以上の条件のいずれかに
該当する場合は単位が不可



今後の予定

- 10／8 線形計画2回目
- 10／15 線形計画3回目
- 10／22 線形計画4回目
- 10／29 線形計画5回目
- 11／5 3年生研究室見学会(予定)
- 11／12 中間試験(予定)



数理計画問題とは？

- 狭義には

数理(数学)を使って
計画を立てるための問題

- 広義には

与えられた評価尺度に関して
最も良い解を求める問題
(最適化問題)

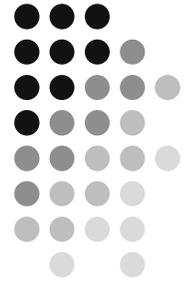
例1: 飲料会社のジュース生産計画

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい
- 資源 — オレンジ、にんじん、トマト
- 生産するジュース
— オレンジ100、トマト100、ミックス



種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

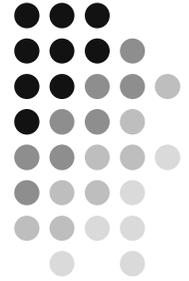
例2: 長方形の問題



- 面積が1以上の長方形を描く



- 外周の長さを最小にするには？



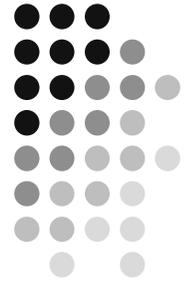
数理計画問題の解き方

- 問題を数式を使って数学的に表現
(定式化)
- 定式化された問題にアルゴリズムを適用、
答えを求める

この授業の内容

数理計画問題を解く様々なアルゴリズムの説明

例1の定式化



- 限られた資源を使って最大の収益を得たい

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

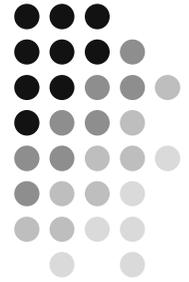
- 各ジュースの生産量を変数で表現

x : オレンジ100の生産量

y : トマト100の生産量

z : ミックスの生産量

例1の定式化(続き)



種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

収益を最大に

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件 $5x + 3z \leq 8$

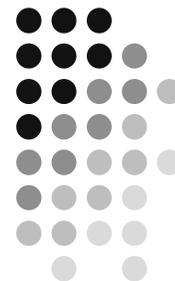
$$2z \leq 2$$

$$4y + z \leq 9$$

$$x, y, z \geq 0$$

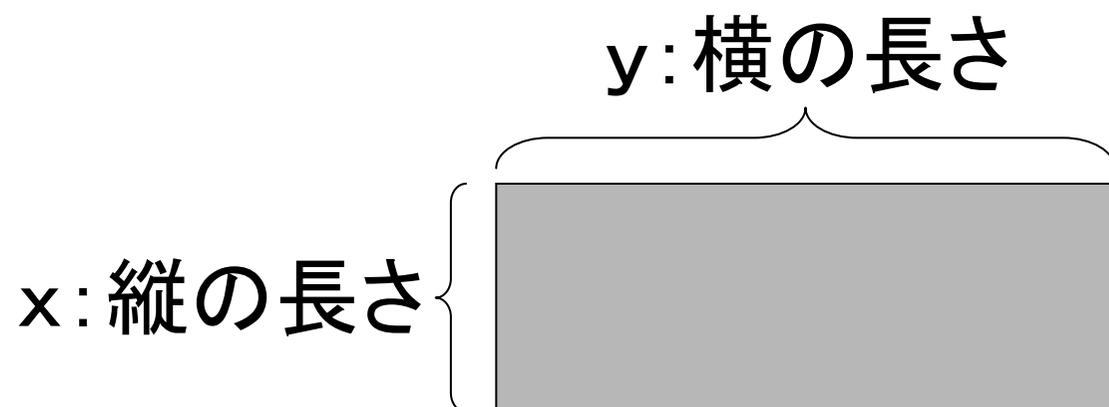
使用できるオレンジの量は8以下

各ジュースの生産量は非負



例2の定式化

- 面積が1以上の長方形を描く
- 外周の長さを最小にするには？



最小化 $2x + 2y$

外周の長さを最小に

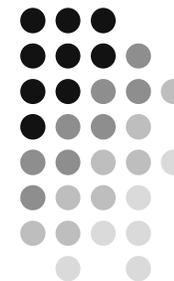
条件 $xy \geq 1$

面積は1以上

$x, y \geq 0$

縦横の長さは非負

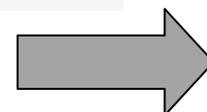
線形計画問題、非線形計画問題



例1:

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } 2x + 2y + 3z \\ & \text{条件 } 5x + 3z \leq 8 \\ & \quad \quad \quad 2z \leq 2 \\ & \quad \quad \quad 4y + z \leq 9 \\ & \quad \quad \quad x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

すべて線形の
等式、不等式で
表現されている



線形計画問題

例2:

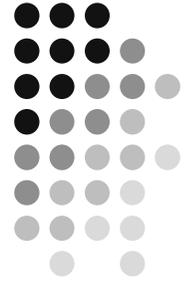
$$\begin{aligned} & \text{最小化 } 2x + 2y \\ & \text{条件 } xy \geq 1 \\ & \quad \quad \quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

非線形の式が
使われている



非線形計画問題

整数計画問題



例1の変種:

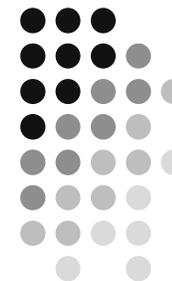
$$\begin{aligned} & \text{最大化} && 2x + 2y + 3z \\ & \text{条件} && 5x + 3z \leq 8 \\ & && 2z \leq 2 \\ & && 4y + z \leq 9 \\ & && x, y, z \geq 0 \\ & && x, y, z \text{ は整数} \end{aligned}$$

変数に整数制約
が付加される



整数計画問題

数理計画問題に関する用語



最大化 $2x + 2y + 3z$

条件 $5x + 3z \leq 8$

$2z \leq 2$

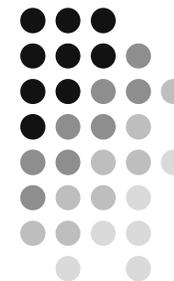
$4y + z \leq 9$

$x, y, z \geq 0$

目的関数: 最小化または
最大化される関数

制約式: 問題
の中の条件式

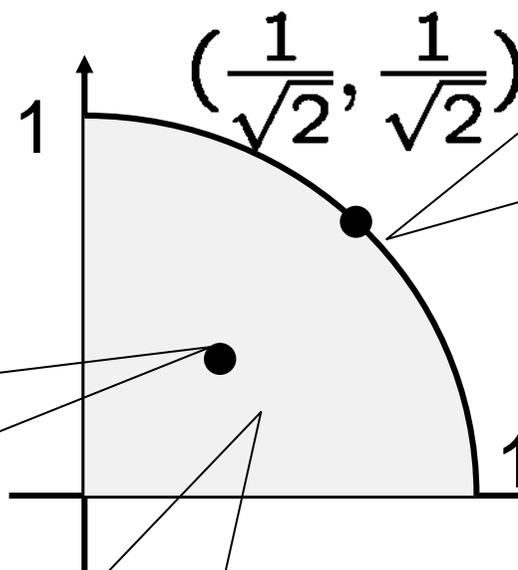
数理計画問題に関する用語(続き)



最大化 $x + y$

条件 $x^2 + y^2 \leq 1$

$x, y \geq 0$



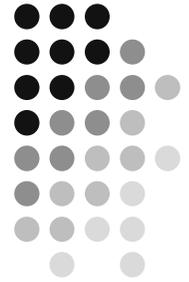
最適解: 目的関数を最大または最小にする許容解

最適値: 最適解の目的関数値

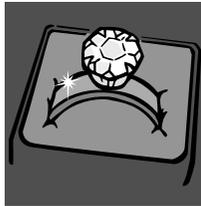
許容解: 制約式をすべて満たすベクトル (x, y)

許容解領域: 許容解すべての集まり

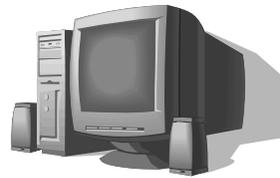
整数計画の例1: ナップサック問題



- ナップサックにもものを詰め込む



500g
10万



10kg
15万



1kg
5千

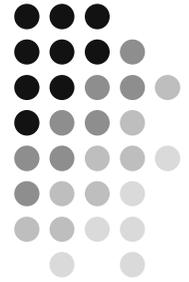


5kg
1万

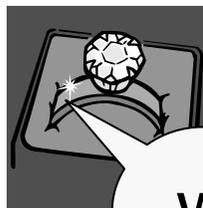
- ナップサックの重量制限(10kg)を越えてはならない
- 総価値を最大にしたい



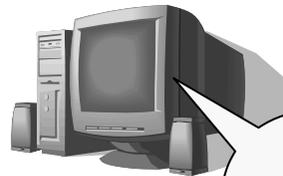
整数計画の例1: ナップサック問題



定式化—各アイテムに変数を割り当て



w



x



y



z

宝石を選んだら $w = 1$, 選ばなかったら $w = 0$

選んだアイテムの総価値

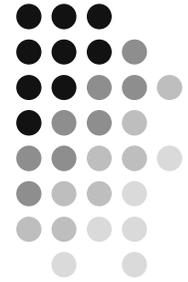
$$\text{最大化 } 10w + 15x + 0.5y + z$$

$$\text{条件 } 0.5w + 10x + y + 5z \leq 10$$

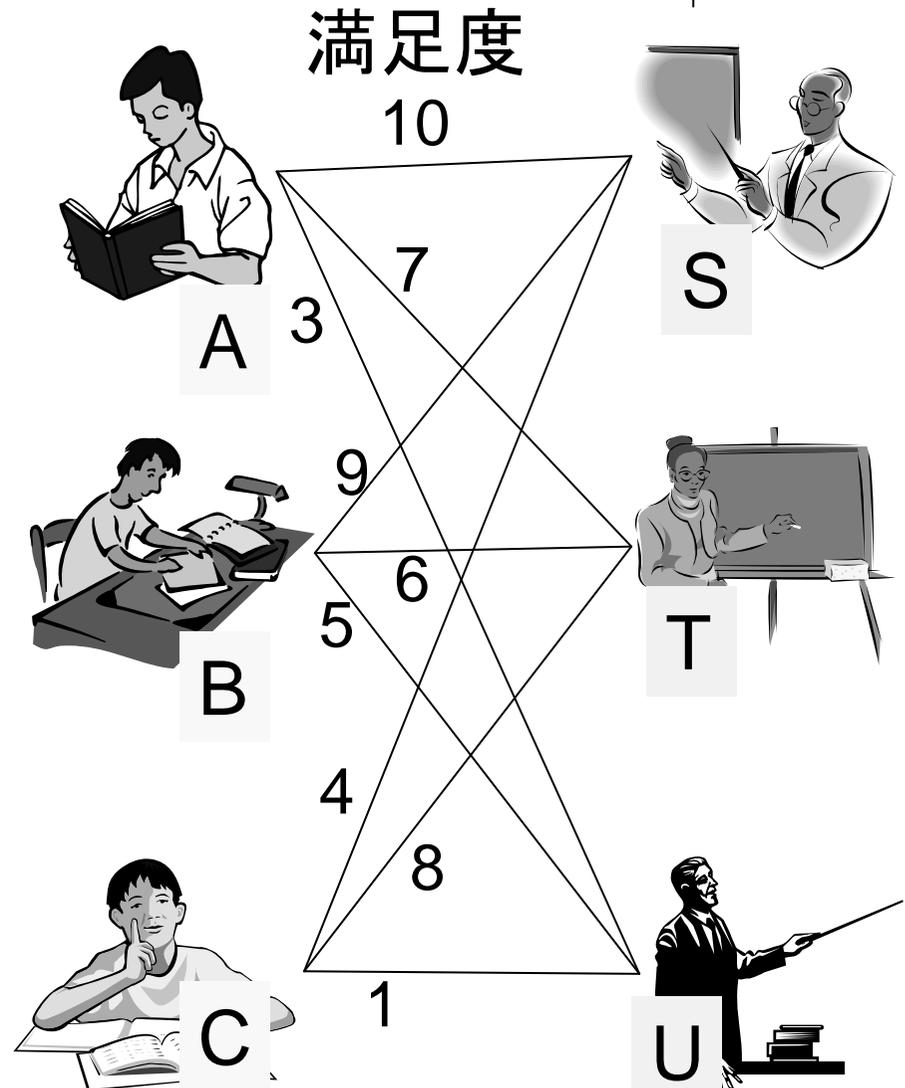
$$w, x, y, z \text{ は } 0 \text{ または } 1$$

選んだアイテムの総重量

整数計画の例2: 研究室配属



- 各研究室に学生一人を割り当てる
- 学生の満足度の合計を最大にしたい



整数計画の例2: 研究室配属

定式化

学生と先生のペアに変数を
割り当て

$$x_{AS}, x_{AT}, x_{AU}, x_{BS}, \dots$$

A を S に割り当てたら $x_{AS} = 1$

割り当てなければ $x_{AS} = 0$

最大化 $10x_{AS} + 7x_{AT} + 3x_{AU} + \dots$

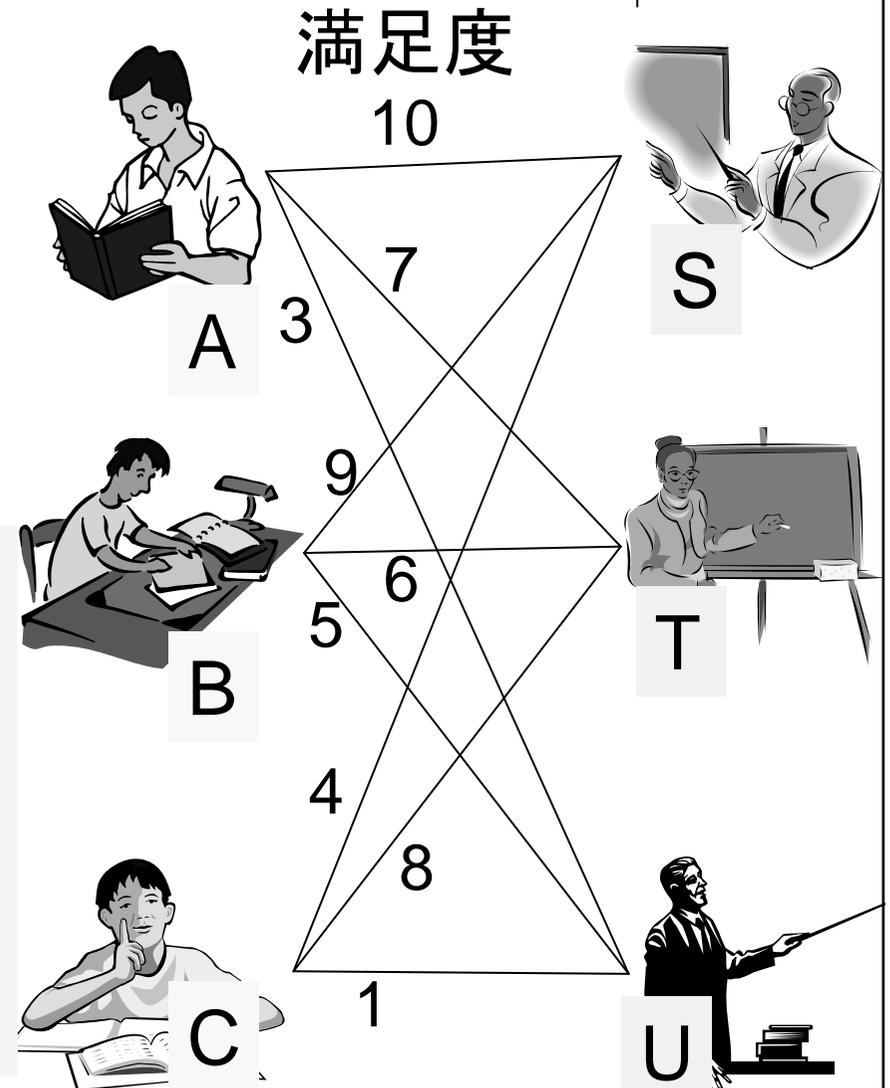
条件 $x_{AS} + x_{AT} + x_{AU} = 1$

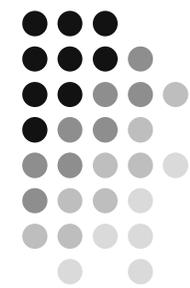
...

$$x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} = 1$$

...

各変数は 0 または 1

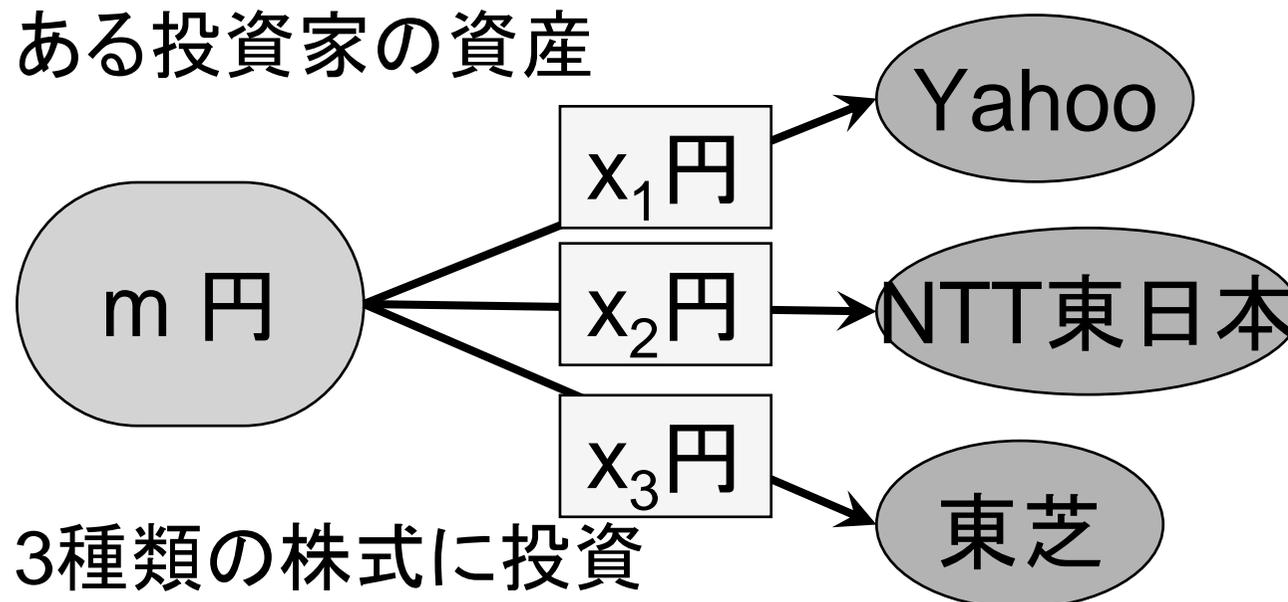




非線形計画の例1： ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオ：株式などの金融資産を組み合わせたもの
投資家が最も満足する投資方法を求めたい

ある投資家の資産

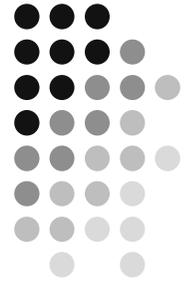


それぞれ
現在の価格 p_i
来月の価格 Q_i
(確率変数)

3種類の株式に投資

1カ月後の資産：
$$M = \frac{Q_1 x_1}{p_1} + \frac{Q_2 x_2}{p_2} + \frac{Q_3 x_3}{p_3}$$
 (確率変数)

非線形計画の例1： ポートフォリオ選択問題



来月の資産Mに対する満足度： $U(M) = M - \beta M^2$

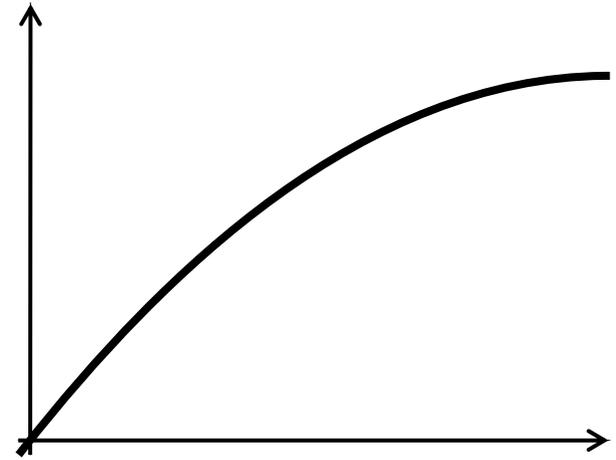
$U(M)$ の期待値を最大にしたい

$$E[U(M)] = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \beta \left[\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]^2$$

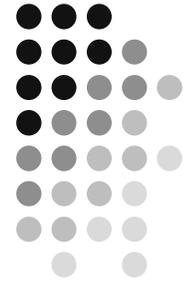
$$- \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

r_i は Q_i/p_i の平均
 σ_{ij} は
 $(Q_i/p_i - r_i)(Q_j/p_j - r_j)$
の共分散

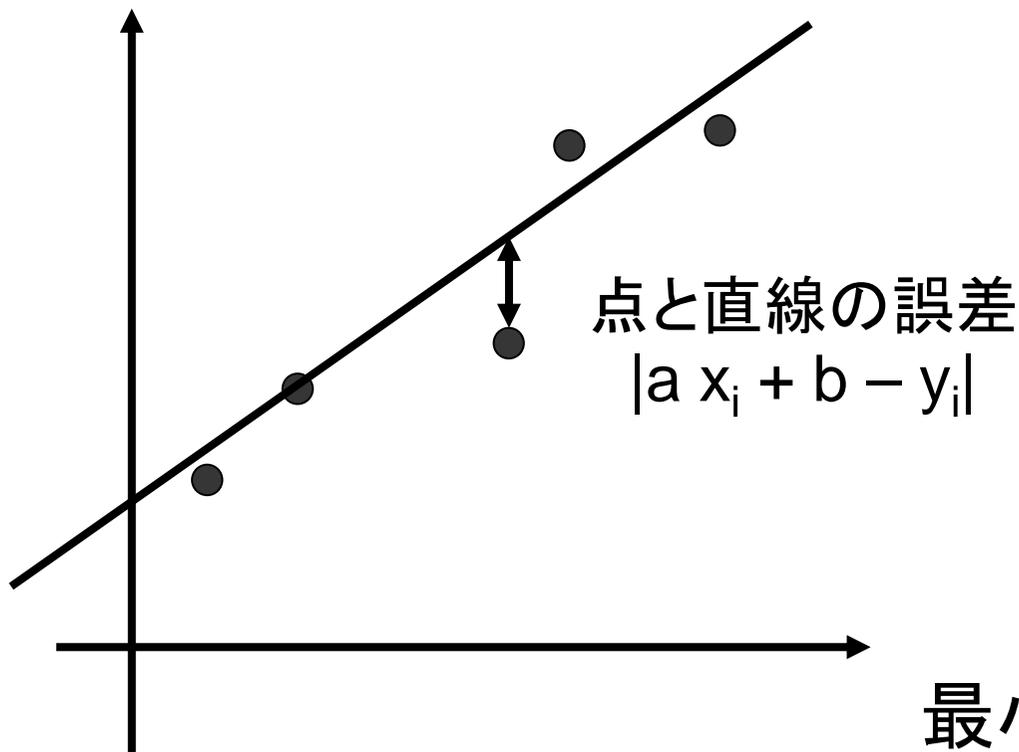
条件： $x_1 + x_2 + x_3 = m, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$



非線形計画の例2: 最小二乗問題



実験データ (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) が得られた
→ 直線 $y = ax + b$ で近似したい

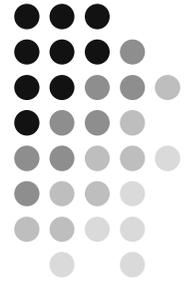


点と直線の誤差の
二乗和を最小にしたい

$$\text{最小化 } \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

2. 線形計画

2.1 線形計画問題とその標準形



線形計画問題(LP)の定義

- 目的関数が線形関数, 制約式も線形式の最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件 $5x + 3z \leq 8$

$$2z = 2$$

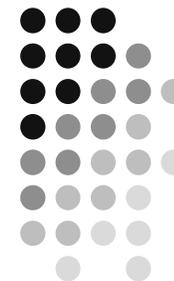
$$4y + z \geq 9$$

$$x, y \geq 0$$

制約式は「 \geq 」「 $=$ 」「 \leq 」
どれでもよい

制約式は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

LPの不等式標準形



任意の形のLPを扱う
のは面倒

⇒ 不等式標準形

◆ 目的は最小化

◆ 制約式は「左辺 \geq 右辺」の形

◆ 各変数は非負

$$\text{最小化 } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{条件 } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

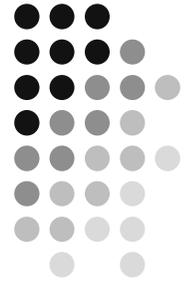
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

不等式標準形への変形



命題2. 1: 任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式と同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b \longrightarrow \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b$$

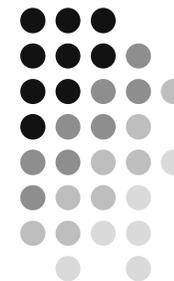
【目的関数の-1倍】 最大化から最小化へ

$$\text{最大化 } \sum_{j=1}^n c_j x_j \longrightarrow \text{最小化 } -\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

【制約の-1倍】 不等式を“ \leq ”から“ \geq ”へ

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \longrightarrow -\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq -b$$

不等式標準形への変形

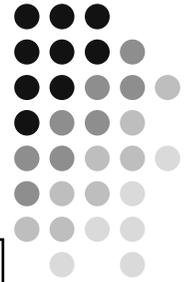


【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

$$x_j \text{ (非負制約なし)} \longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$$

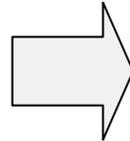
不等式標準形への変形の例



最大化 $3x + 2y$

条件 $x + y = 1$

$x \geq 0$



最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$

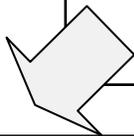
条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

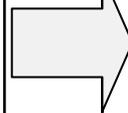


最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) \leq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$



最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $-x - (y_1 - y_2) \geq -1$

$x + (y_1 - y_2) \geq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$