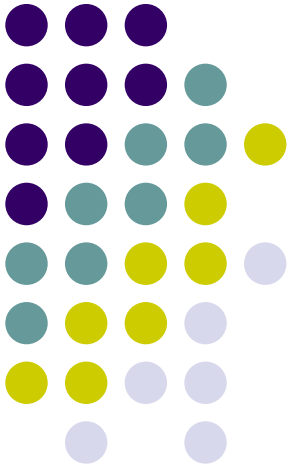
数理計画法　第9回

ネットワーク計画
非線形計画



担当:　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

最大フロー問題

目的：供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい

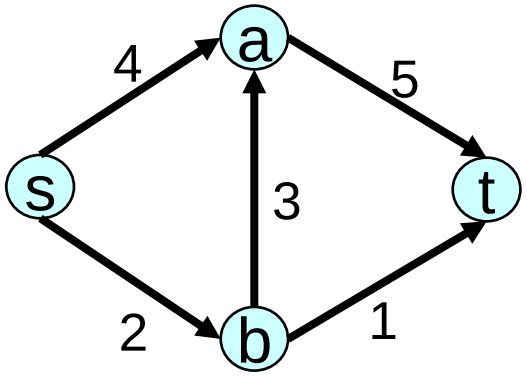
条件1（容量条件）：

0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量

条件2（流量保存条件）：

頂点から流れ出すフローの量＝　流れ込むフローの量

問題例と定式化



最大化　f

条件

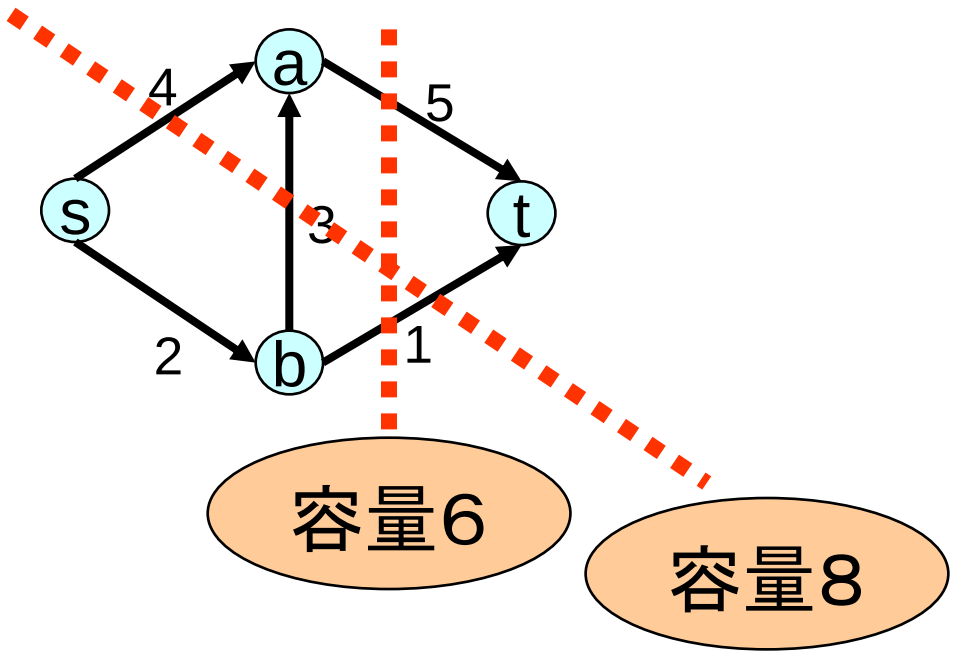
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \leq x_{sa} \leq 4,\ 0 \leq x_{sb} \leq 2,\ 0 \leq x_{ba} \leq 3,$$
$$0 \leq x_{at} \leq 5,\ 0 \leq x_{bt} \leq 1$$

最小カット問題

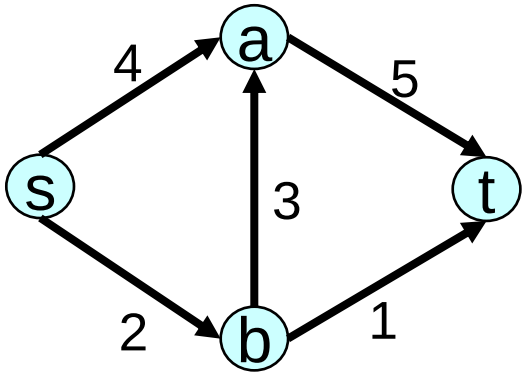
最小カット問題

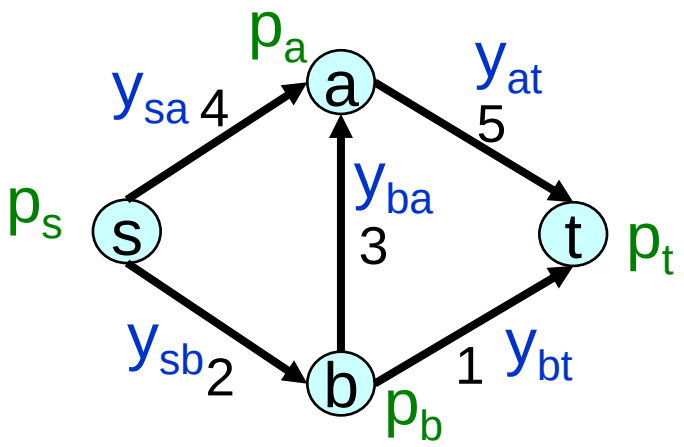
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V

出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



最大フロー問題の定式化の双対問題





最大化 f

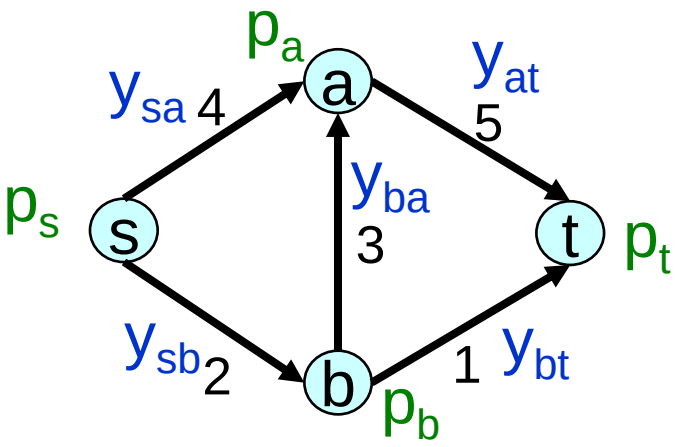
条件
$$x_{sa} + x_{sb} - f = 0$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} + f = 0$$
$$x_{sa} \leq 4$$
$$x_{sb} \leq 2$$
$$x_{ba} \leq 3$$
$$x_{at} \leq 5$$
$$x_{bt} \leq 1$$
$$x_{sa}, x_{sb}, x_{ba}, x_{at}, x_{bt} \geq 0$$

最小化 $4y_{sa} + 2y_{sb} + 3y_{ba} + 5y_{at} + y_{bt}$

条件
$$-p_s + p_t = 1$$
$$p_s - p_a + y_{sa} \geq 0$$
$$p_s - p_b + y_{sb} \geq 0$$
$$p_b - p_a + y_{ba} \geq 0$$
$$p_a - p_t + y_{at} \geq 0$$
$$p_b - p_t + y_{bt} \geq 0$$
$$y_{sa}, y_{sb}, y_{ba}, y_{at}, y_{bt} \geq 0$$

これは最小カット問題の定式化になっていない

双対問題と最小カットの関係



最小化 $4y_{sa} + 2y_{sb} + 3y_{ba} + 5y_{at} + y_{bt}$

条件
$$-p_s + p_t = 1$$
$$p_s - p_a + y_{sa} \geq 0$$
$$p_s - p_b + y_{sb} \geq 0$$
$$p_b - p_a + y_{ba} \geq 0$$
$$p_a - p_t + y_{at} \geq 0$$
$$p_b - p_t + y_{bt} \geq 0$$
$$y_{sa}, y_{sb}, y_{ba}, y_{at}, y_{bt} \geq 0$$

最小 s-t カット (S, T) から双対問題の解 y_{uv}, p_v を次のように定義

頂点 v が
- Tに含まれる➔ $p_v = 1$
- Sに含まれる➔ $p_v = 0$

枝 (u, v) は
- S から T に向かう枝➔ $y_{uv} = 1$
- それ以外 ➔ $y_{uv} = 0$

解 y_{uv}, p_v は双対問題の許容解
解の目的関数値
- ＝最小 s-t カットの容量
- ＝最大フローのフロー値
- ＝主問題の最適値

∴解 y_{uv}, p_v は双対問題の最適解

最小費用フロー問題

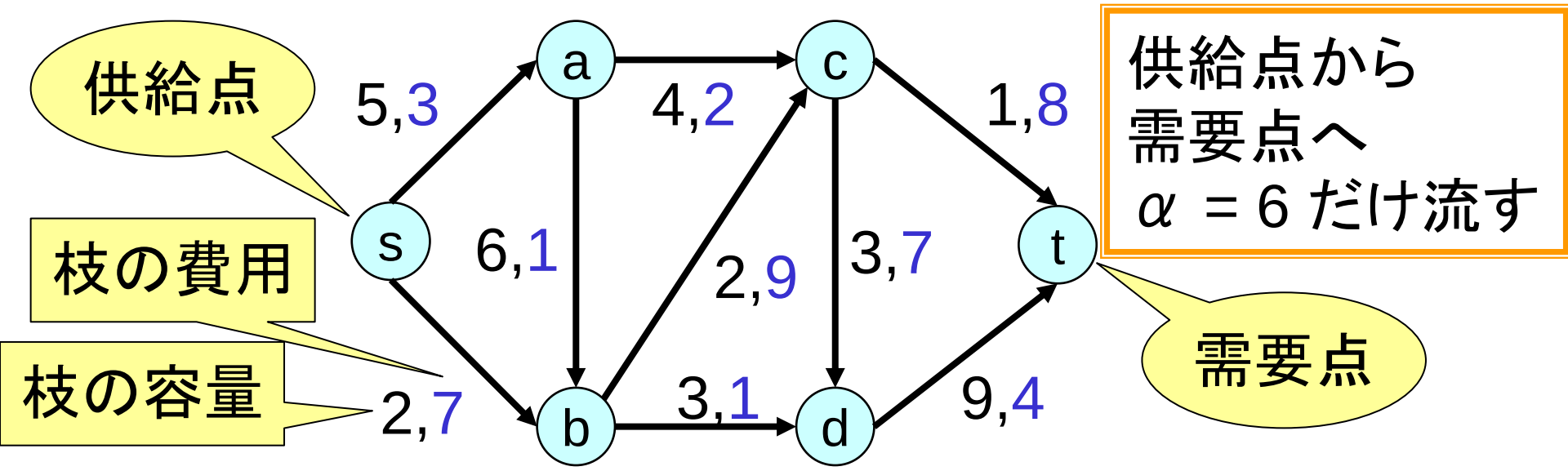
入力：有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

需要(供給)量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題の応用例：研究室配属問題

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

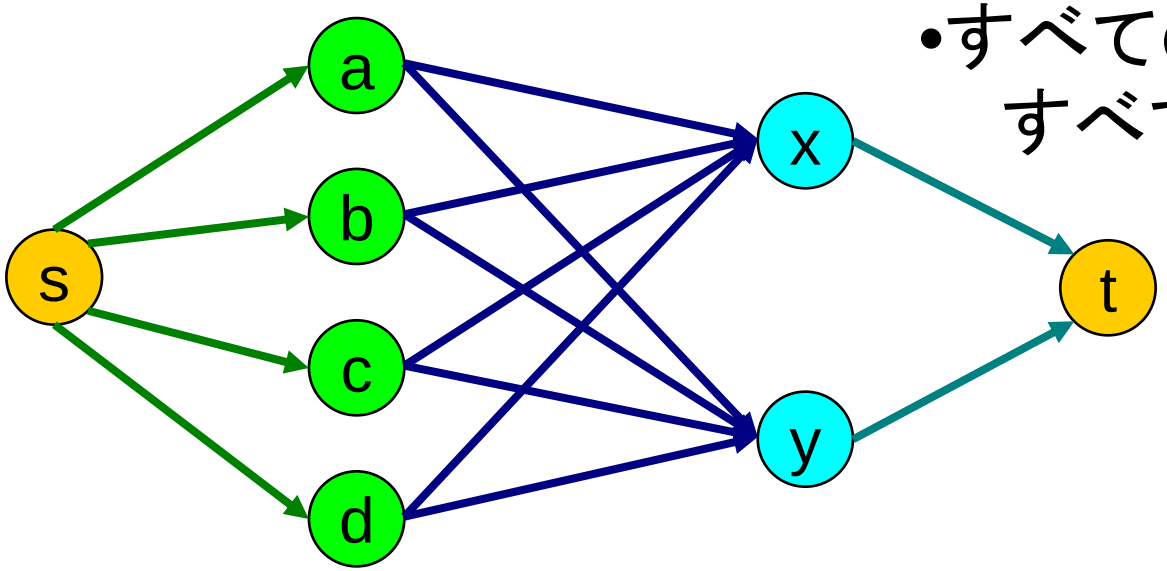
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題

最小費用フロー問題に変形

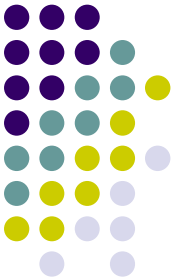
- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d
- 各研究室に対応する頂点 x, y
- 供給点 s, 需要点 t

- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)

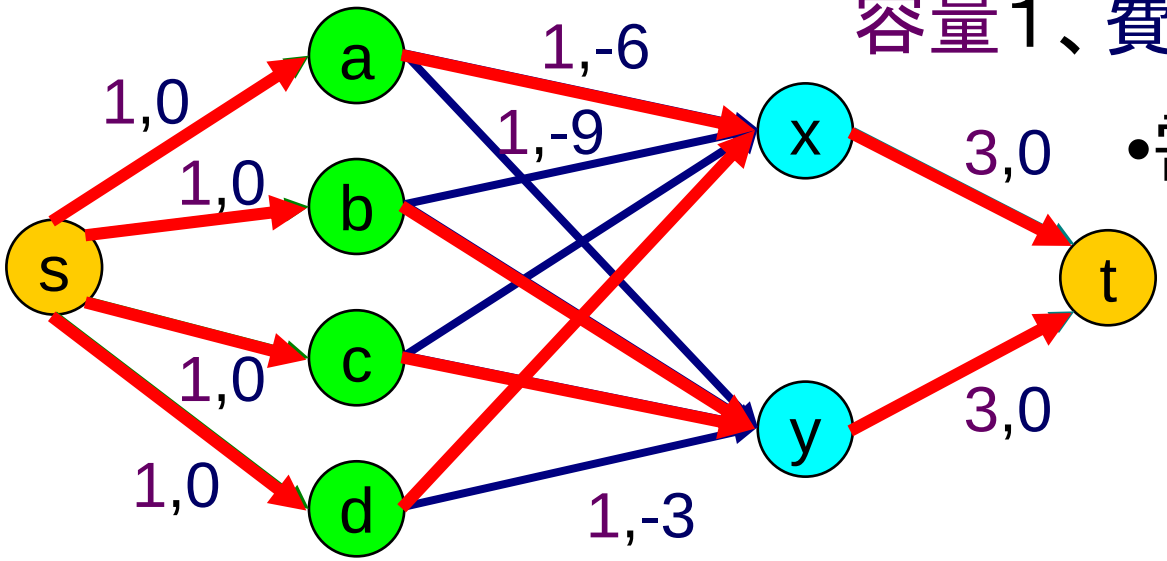


- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例：研究室配属問題



- 供給点から学生頂点への枝ー容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝
  ー容量＝研究室の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝
  容量1、費用＝（－1）×満足度



- 需要（供給）量＝学生数

学生A,D→X研究室

学生B,C→Y研究室

この問題の（整数値）フローー⇔定員を満たす配属方法

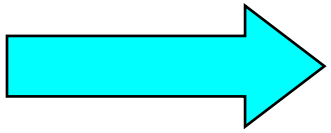
フローの費用⇔（－1）×学生の満足度の合計

∴最小費用フロー問題に変形できた

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

これまで扱ってきた最小費用流問題：

各枝の費用は線形関数 $f_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}\ x_{ij}$



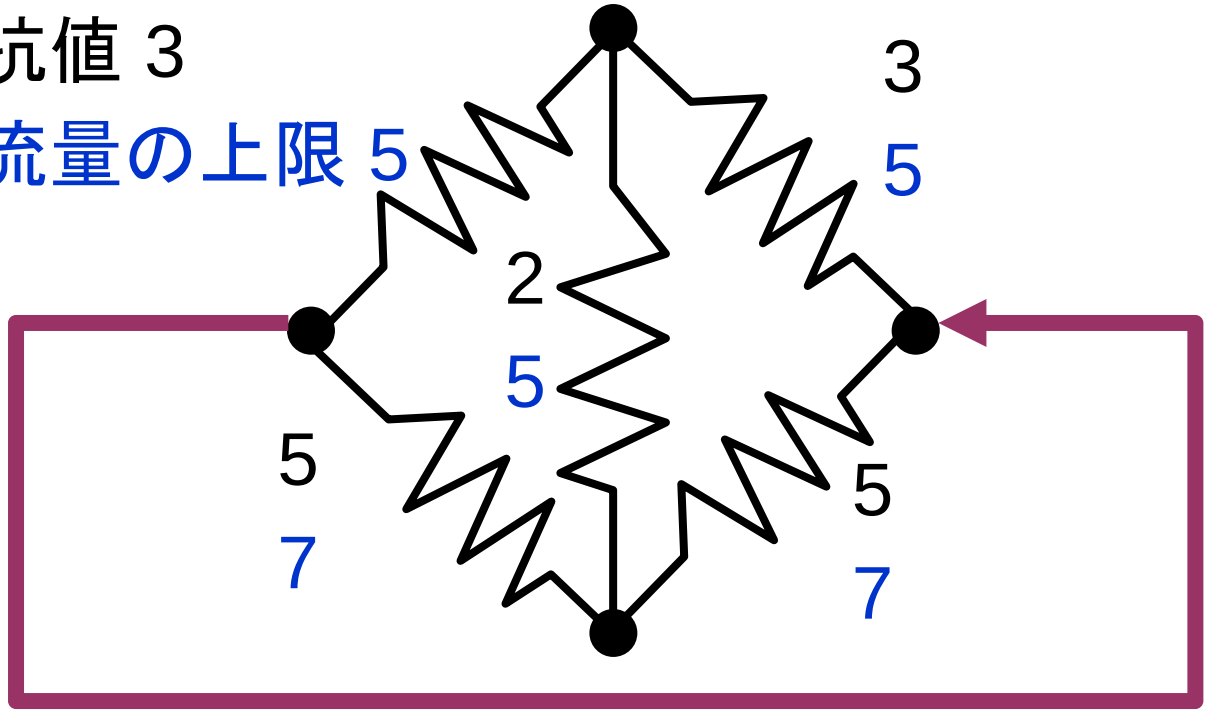
非線形関数 $f_{ij}(x_{ij})$ の場合に拡張

電気回路の例：

抵抗値 R の抵抗に電流が x アンペア流れると消費されるエネルギー量は

$f(x) = (1/2)\ R\ x^2$ （2次の非線形関数）

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

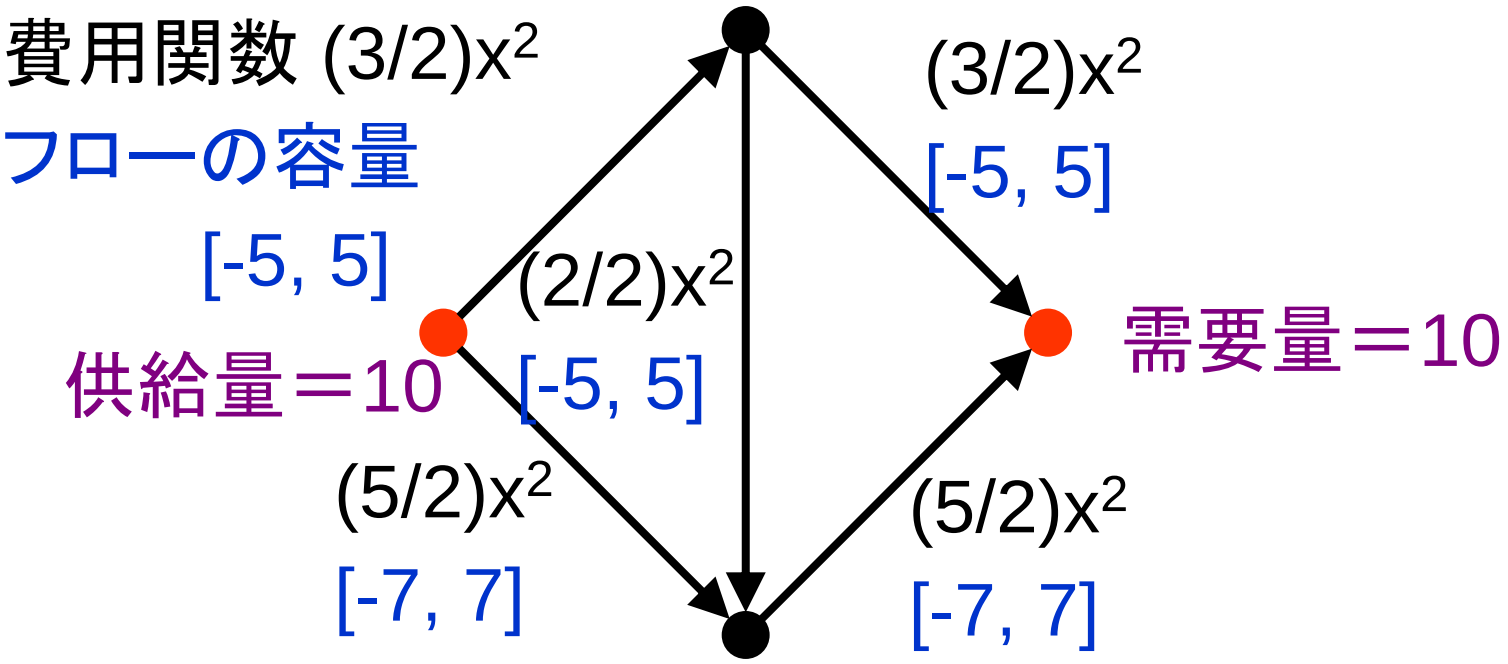


各抵抗に流れる電流量はどのように決まるか？

⇒回路全体で消費される総エネルギー量を最小にする

⇒ 最小費用流問題へ

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題



対応する非線形最小費用流問題（費用が2次関数）

—負閉路消去法の拡張版を使って解くことが可能

非線形計画問題とは？

目的関数や制約式が必ずしも線形でない
数理計画問題

例：長方形の外周最小化問題

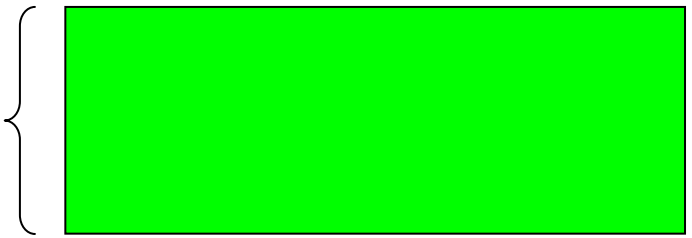
最小化　$2x + 2y$

条件　$xy \geqq 1$

$x, y \geqq 0$

x：縦の長さ

y：横の長さ



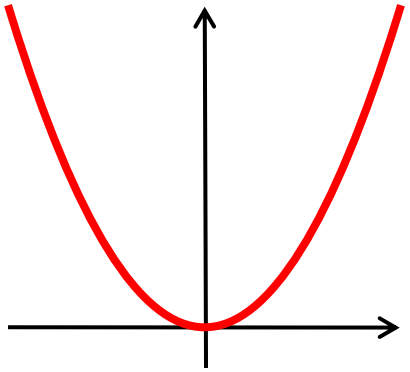
非線形の
不等式

⇒ 非線形計画問題

注意:線形計画問題は非線形計画問題の特殊ケース

非線形関数の例（その1）[p.87]

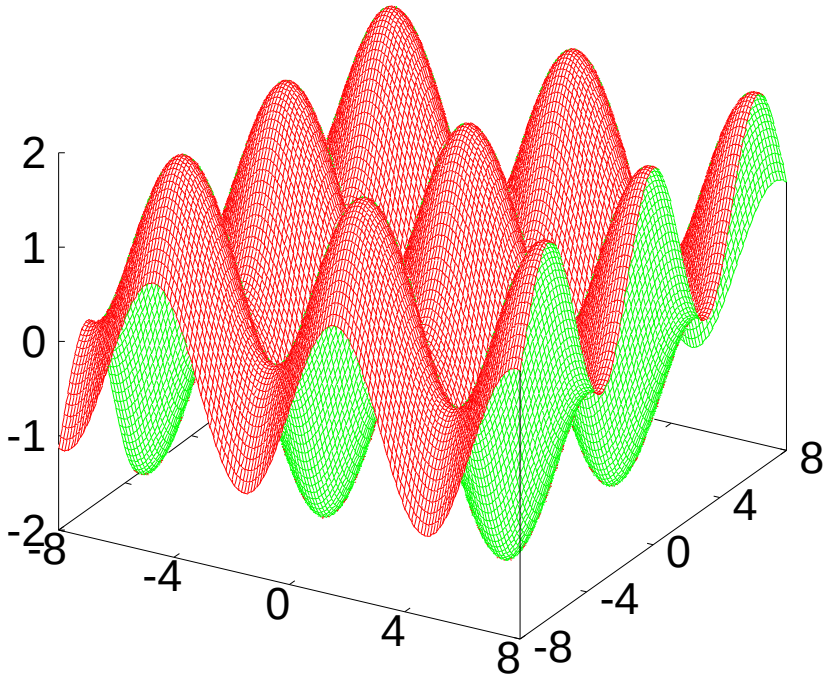
非線形関数 ― 線形でない関数



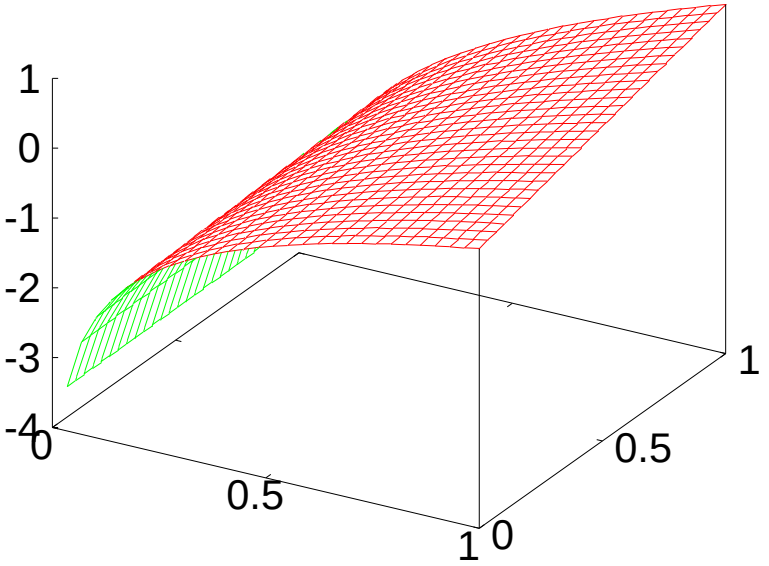
$$f_1(x) = x^2$$

微分可能な非線形関数の例

$$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$



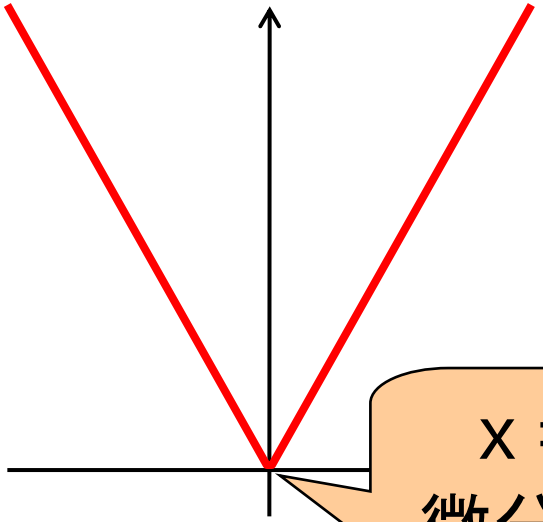
$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$



非線形関数の例（その2）[p.88]

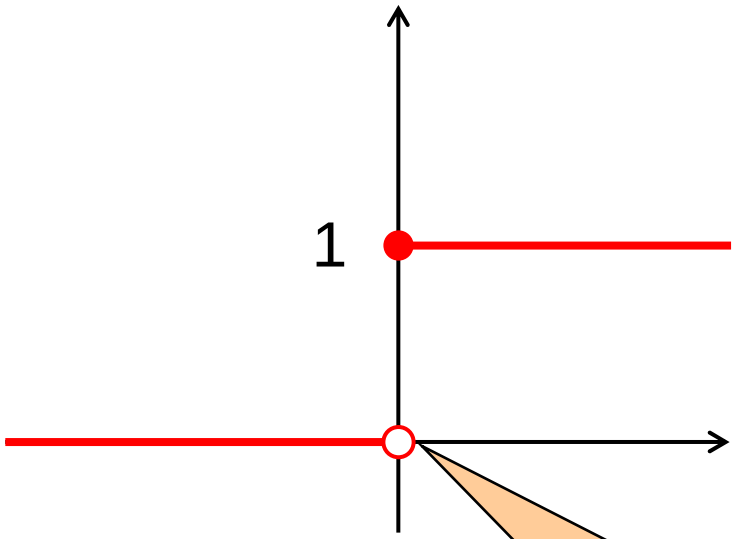
微分不可能な非線形関数の例

$$f_4(x) = |x|$$



x = 0 で
微分不可能

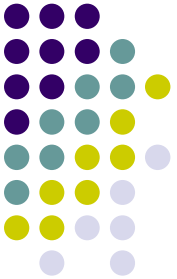
$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0 \text{のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$



x = 0 で
微分不可能
不連続

この授業：
主に何回でも微分可能な関数を扱う

非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]



制約なし最適化問題

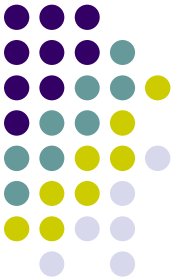
入力： 目的関数 f(x)
問題： 最小化　f(x)　条件　なし

制約つき最適化問題

入力： 目的関数 f(x), 制約を表す関数 $g_i(x)$ (i = 1, 2, …, m)
問題： 最小化　f(x)　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

この講義では、制約なし問題を主に扱う

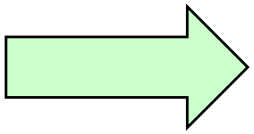
非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]



制約つき問題と制約なし問題の関係

- 制約つき問題は制約なし問題に変形できる

最小化　f(x)　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)



最小化　f(x) + h(x)　条件　なし

$$h(x)=\begin{cases} 0 & (g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i=1,2,\ldots,m) \\ M & (\text{その他}) \end{cases}$$

Mは十分に大きい正数

（注意）この制約なし問題を直接解くことは実用上難しい

- 制約なし問題を繰り返し解くことにより、制約つき問題を解くことが出来る

→p.146 ペナルティ関数法、バリア関数法

勾配ベクトル [p.89]

関数 f の勾配ベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

一変数関数の場合は $\nabla f(x) = f'(x)$

例：

$$f_1(x) = x^2 \Rightarrow \nabla f_1(x) = 2x$$

$$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$

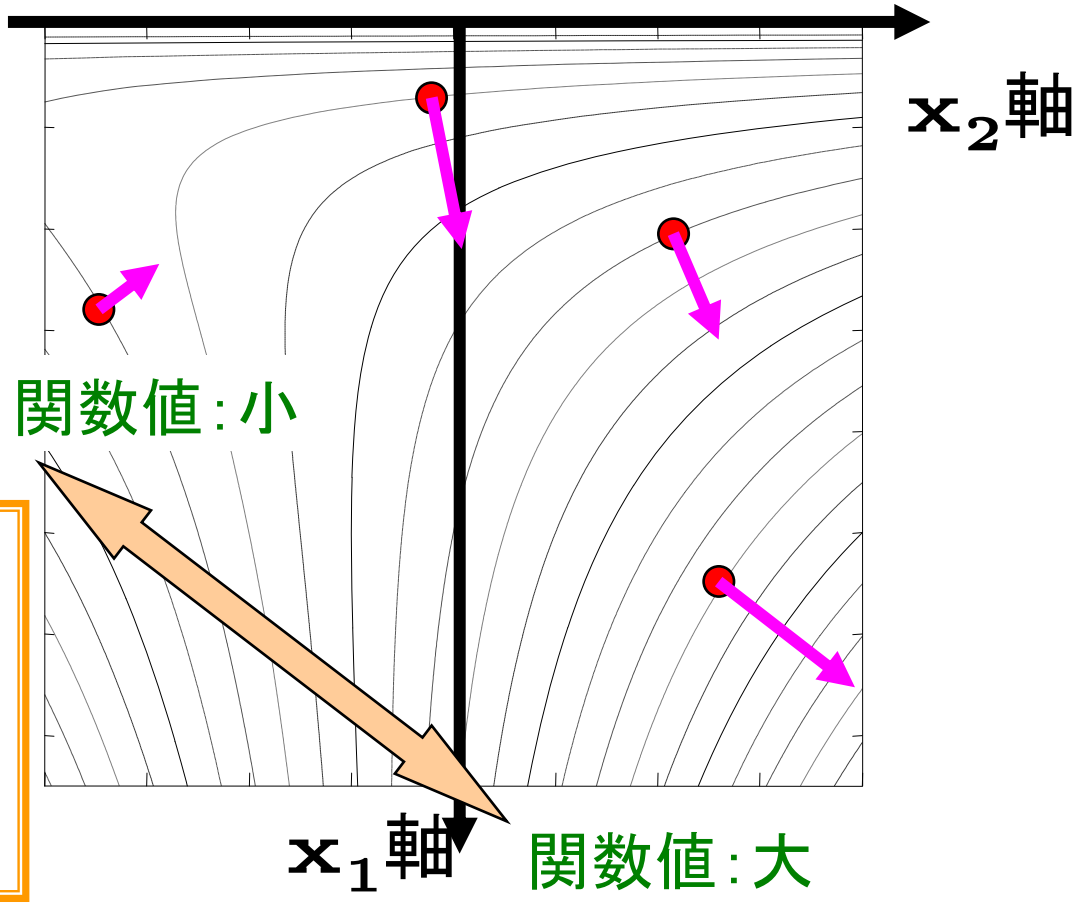
$$\Rightarrow \nabla f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

勾配ベクトル（続き）[p.89]

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$

$$\nabla f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1/x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

関数f_3の等高線と
勾配ベクトルの方向



勾配ベクトルのイメージ：
- 関数という山を登るときに最も急な方向
- 関数値が増加する方向

勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

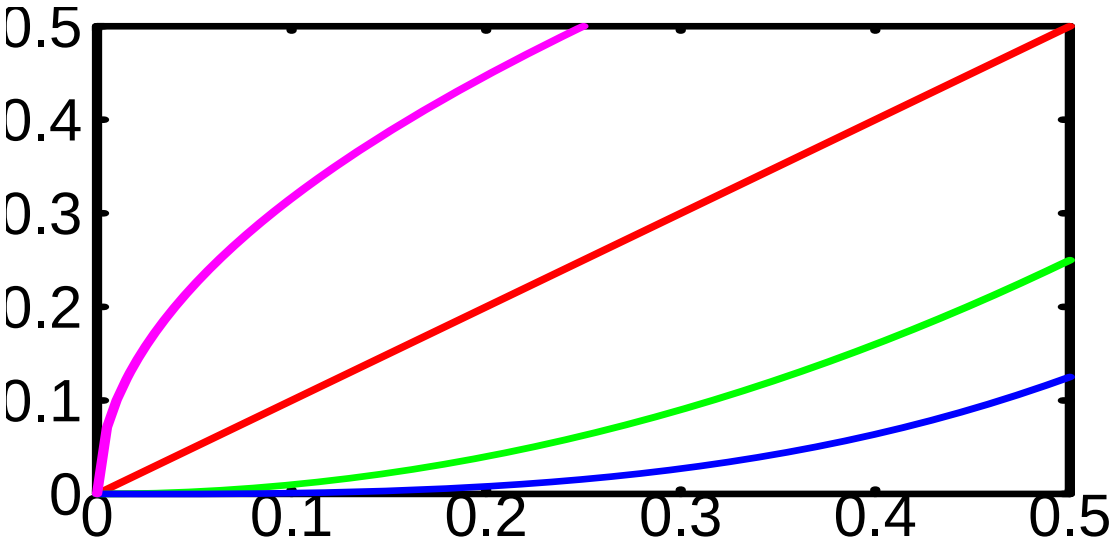
関数 f は勾配ベクトルを傾きとする線形関数により近似できる

（一次の）テイラー展開

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

記号 $o(\alpha)$: $\alpha \to 0$のときに$g(\alpha)/\alpha \to 0$となる関数$g(\alpha)$を表す.

α^2, α^3など,
αより速く0に
近づく関数を表す



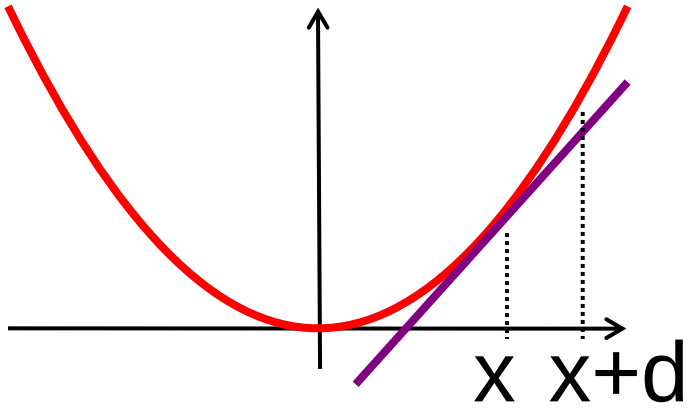
勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

例: $f_1(x) = x^2 \qquad \nabla f_1(x) = 2x$

$$f_1(x+d) = (x+d)^2 = x^2 + (2x)d + d^2$$

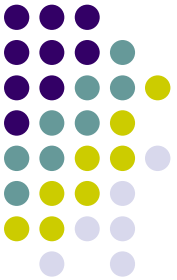
$$= x^2 + (2x)d + o(|d|)$$



関数 f を点 x において線形関数で近似

$(x+d)^2$ と $x^2 + 2xd$ の誤差 ― |d|が小さければ十分小さい

勾配ベクトルの性質 [p.89]



勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

性質：任意の x に対し、∇f ≠0 ならば
十分小さい δ＞0に対して　$f(\boldsymbol{x}-\delta\nabla f(\boldsymbol{x})) < f(\boldsymbol{x})$

証明：$\delta=\varepsilon/\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|, \boldsymbol{d}=-\delta\nabla f(\boldsymbol{x})$ とおく（ε：正の数）

テイラー展開より　$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{d}+o(\|\boldsymbol{d}\|)$

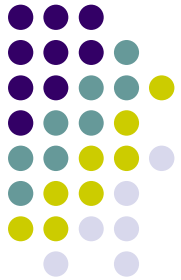
$= f(\boldsymbol{x})-\varepsilon\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|+o(\varepsilon)$

正数 ε を十分小さくする ⇒ $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ は0に近い値

$$-\varepsilon\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|+o(\varepsilon)=\varepsilon\left(-\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)<0$$

$\therefore\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x})$

勾配ベクトルの性質 [p.89]

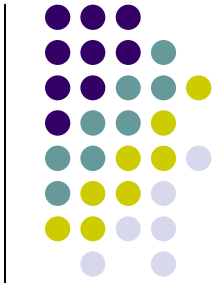


勾配ベクトルの方向に進むと関数値が増える

性質：任意の x に対し、$\nabla f \neq 0$ ならば
十分小さい $\delta > 0$に対して　　$f(\boldsymbol{x}+\delta\nabla f(\boldsymbol{x})) > f(\boldsymbol{x})$

証明は省略（直前の性質と同様に証明できる）

最適性条件 [p.97]



制約なし最適化問題：　最小化　f(x)

最適性条件：ベクトル x が非線形計画問題の
最適解であるための必要条件

x は停留点　⇔　$\nabla f(x) = 0$

定理（制約なし最適化問題の最適性条件）：
x*: 制約なし問題の最適解　⇒　x*は停留点

証明：　$\nabla f(x^*) \neq 0$ と仮定

勾配ベクトルの性質より、十分小さい $\delta > 0$に対して

$$f(\boldsymbol{x}^* - \delta \nabla f(\boldsymbol{x}^*)) < f(\boldsymbol{x}^*)$$

x* が最適解であることに矛盾　　$\therefore \nabla f(x^*) = 0$

演習問題

問題１:下記の4つの関数の勾配ベクトルを計算しなさい

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$$

$$f_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \quad (\text{ただし，} \boldsymbol{x}\text{は}n\text{次元ベクトル，} \boldsymbol{V}\text{は}n\times n\text{対称行列})$$

問題2:次の２つの非線形計画問題

「最大化　$f_1(x_1, x_2)$　条件　$f_2(x_1, x_2) \leqq 5$」

「最小化　$f_2(x_1, x_2)$　条件　$f_1(x_1, x_2) = 3$」

を（手計算で）解きなさい．また，問題および最適解を図で表しなさい．