数理計画法　第8回

ネットワーク計画
２．最大フロー問題
３．最小費用フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

中間試験の結果について

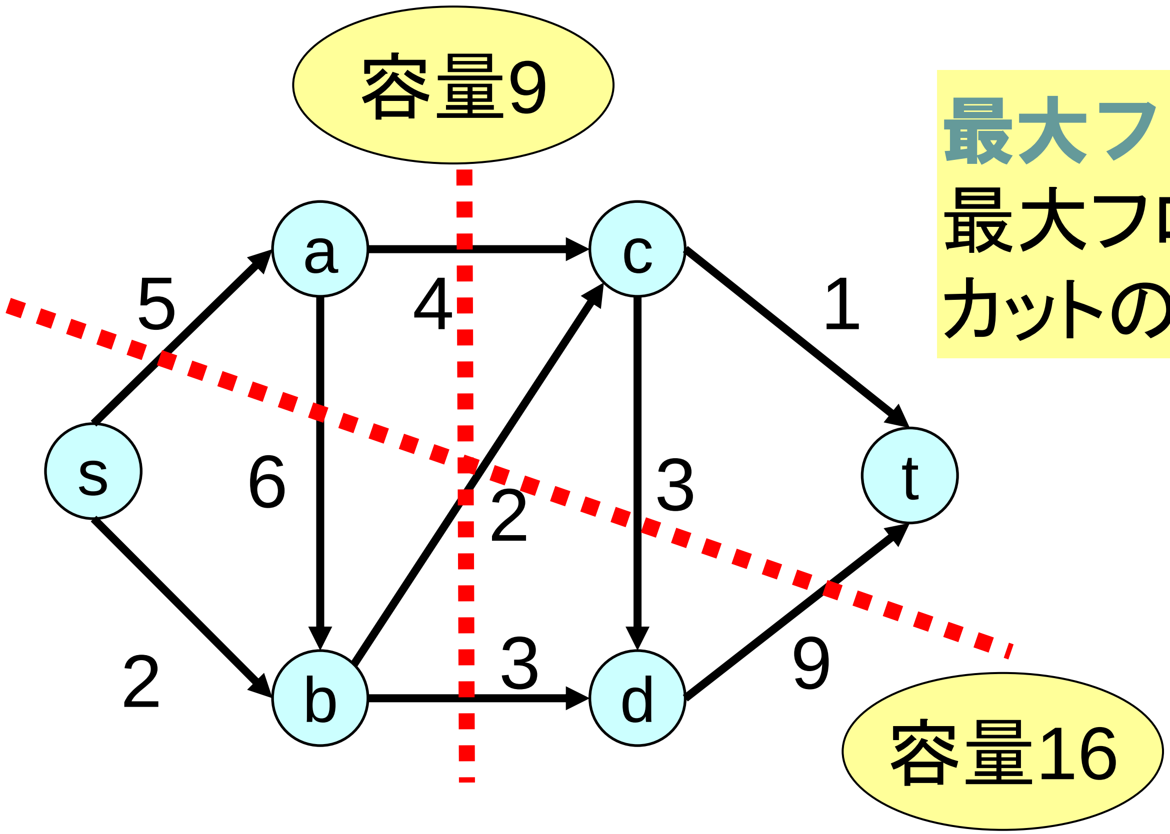
- 25点以上は合格，24点以下は不合格.
  - 最高点45点，平均26．64点
- 不合格の学生の一部には救済措置有り
  - 中間試験の問題を印刷し，それをレポートとして提出
  - 締切は1／8，ただし得点が39点以下の場合は不合格確定
  - 過去のレポート提出状況が良くない学生は追加レポート有り
  - 未提出のレポート，および1点以下だったレポートについて再提出すること. こちらもきちんと解いて提出すること

最小カット問題

最小カット問題

入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V

出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



最大フロー最小カット定理

最大フローのフロー値と最小カットの容量は等しい

以降はこの定理の証明を行う

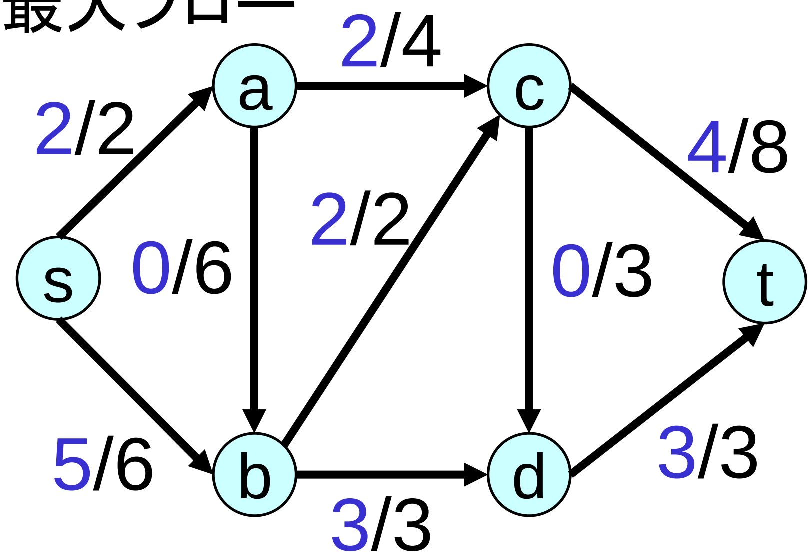
最大フロー最小カット定理の証明（その1）

性質2： 任意のs-tカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フロー量 f ≦ カットの容量 U(S,T)

最大フロー(x_{ij} | (i,j) ∈ E)に対し,
ある s-t カット(S, T)が f = U(S, T) を満たすならば,
それは最小カット

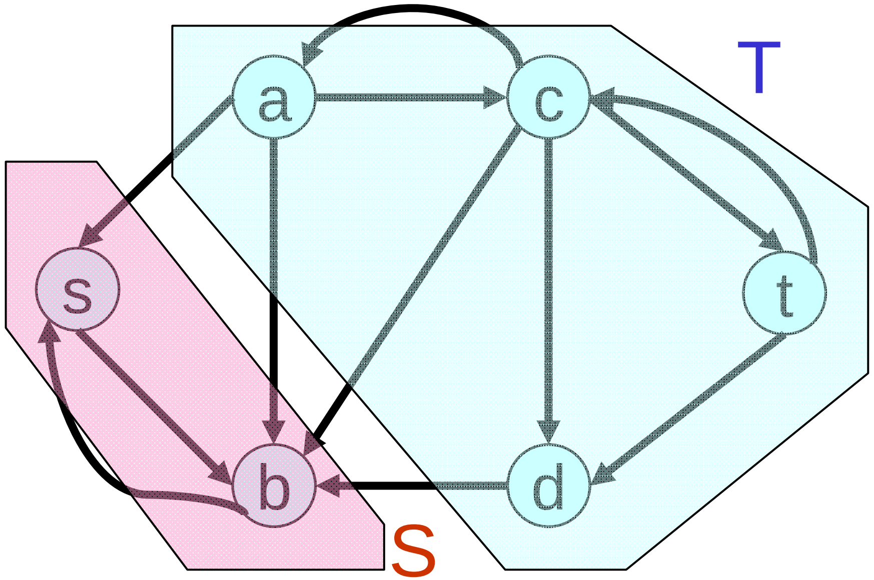
フロー増加法の終了時に、
このような s-tカットが実際に存在することを示す

最大フロー最小カット定理の証明(その2)



最大フローに対して
残余ネットワークを作る

残余ネットワークには
s-t パスが存在しない

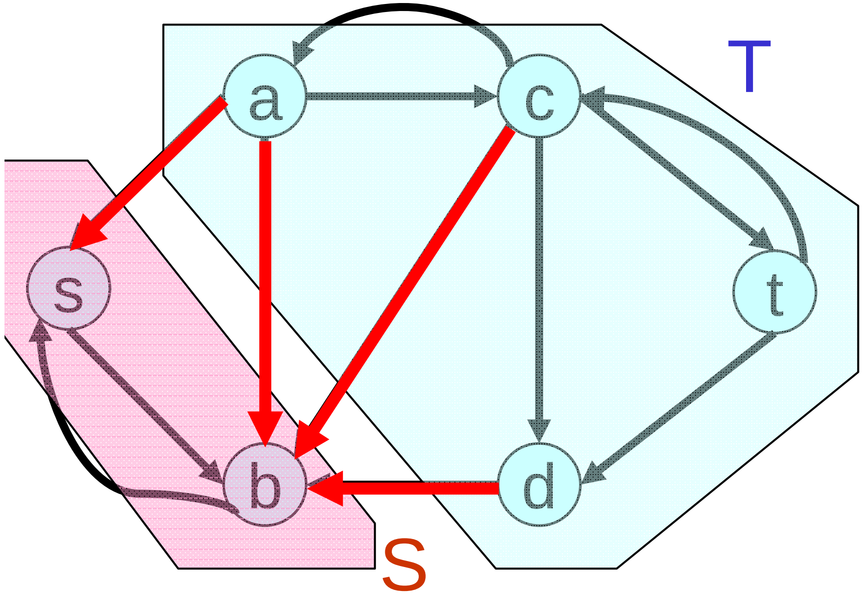


S = 残余ネットワークにおいて
s から到達可能な頂点集合

T = V – S

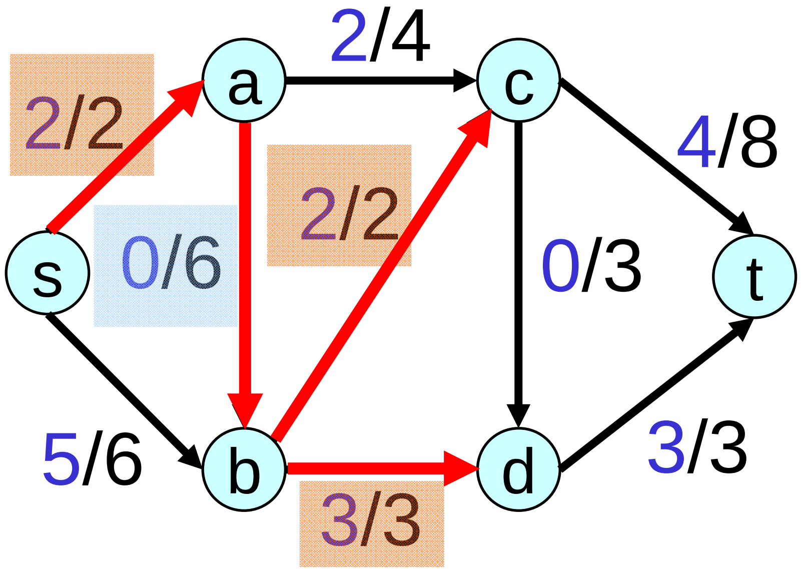
に対し、(S, T) は s-t カット

最大フロー最小カット定理の証明(その3)



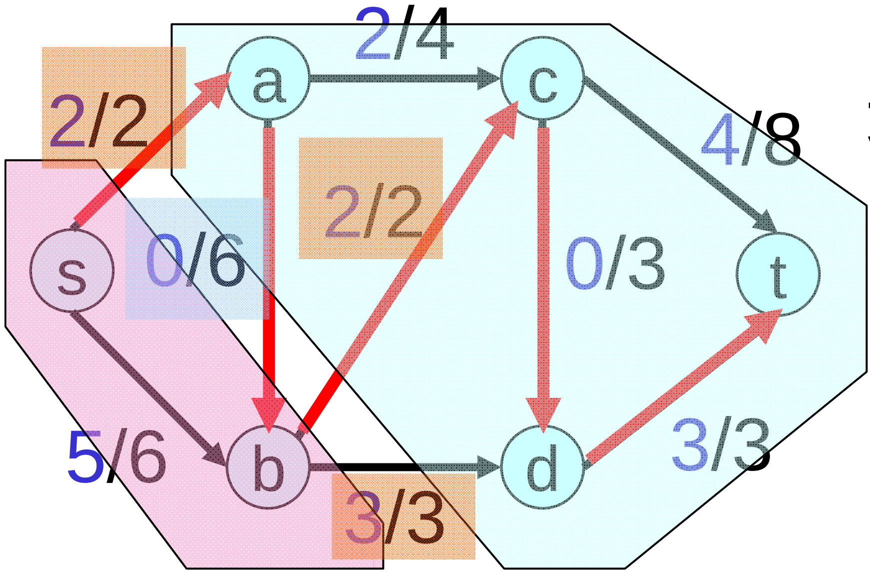
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

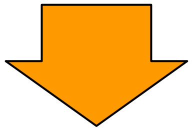
最大フロー最小カット定理の証明(その4)



元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$



$x(S, T) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$

$= \Sigma\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$

$x(T, S) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$

$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = U(S, T)$

性質1より　$f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore\ f = U(S, T)$　（証明終わり）

最大フロー最小カット定理

定理：フロー増加法により求められたフローは最大フロー

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

T = V – S

とすると、(S, T) は最小s-t カット

さらに $f = U(S,T)$ が成り立つ

最大フロー最小カット定理：

最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小s-tカット(S,T)に対し

$$f = U(S,T)$$

最小費用フロー問題の定義

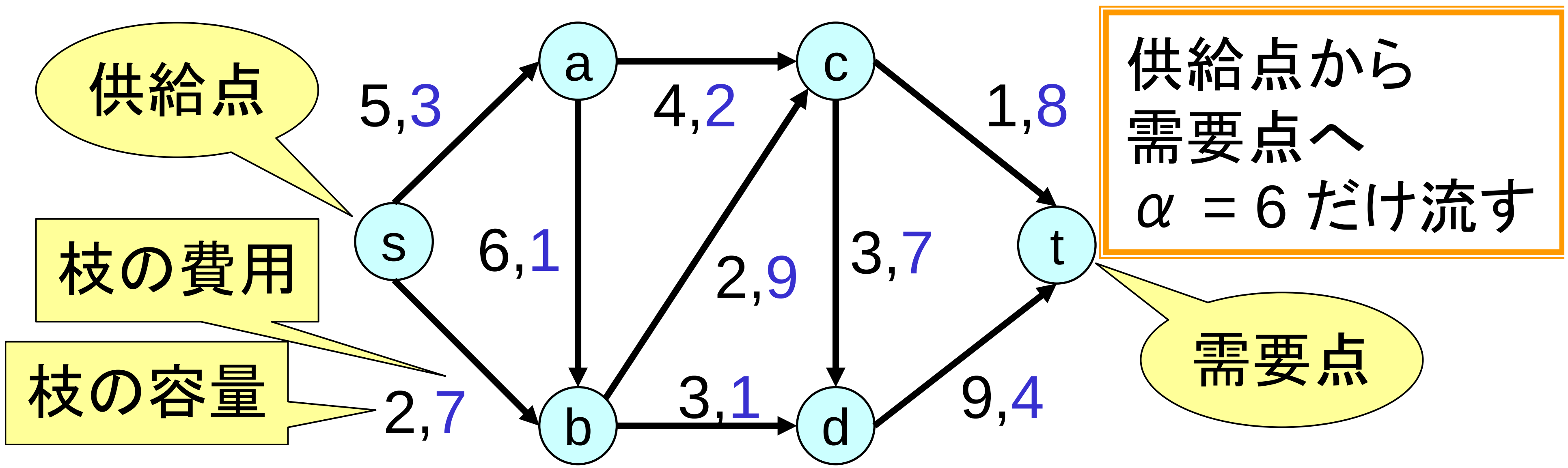
入力 : 有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

需要（供給）量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力 : 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題の定式化

最小化　$\Sigma\{ c_{ij}\ x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$

各枝の費用
×フロー量　の和

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\} - \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$

$(k \in V - \{s, t\})$

各頂点での
流量保存条件

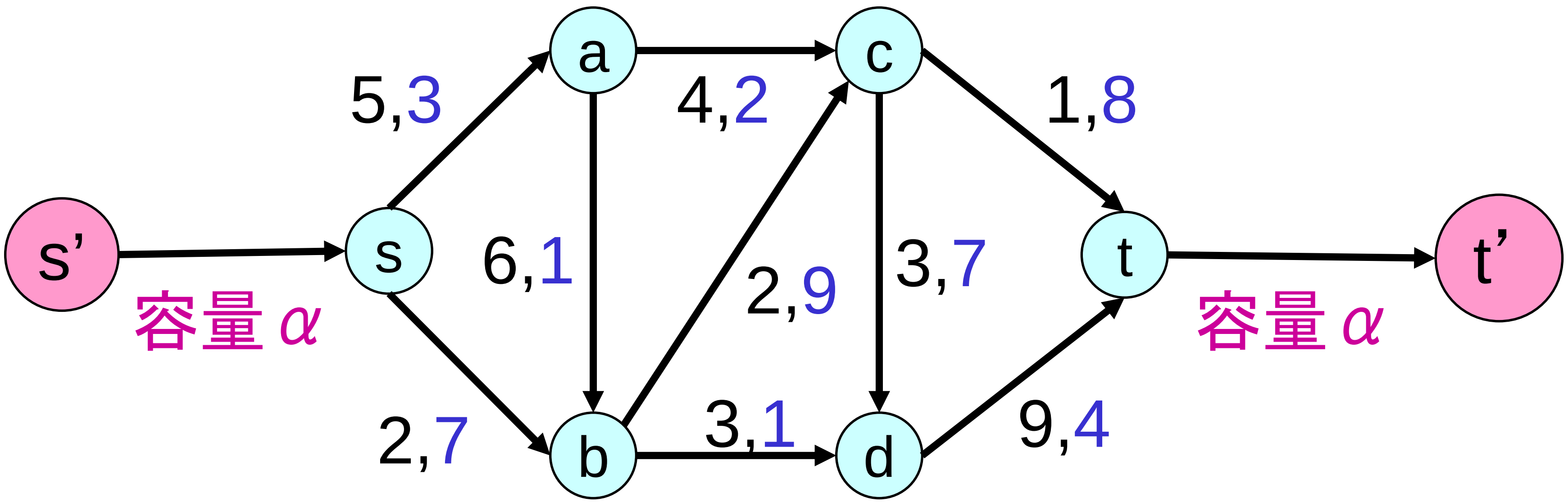
需要供給量に
関する条件

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = \alpha$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\} - \Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -\alpha$

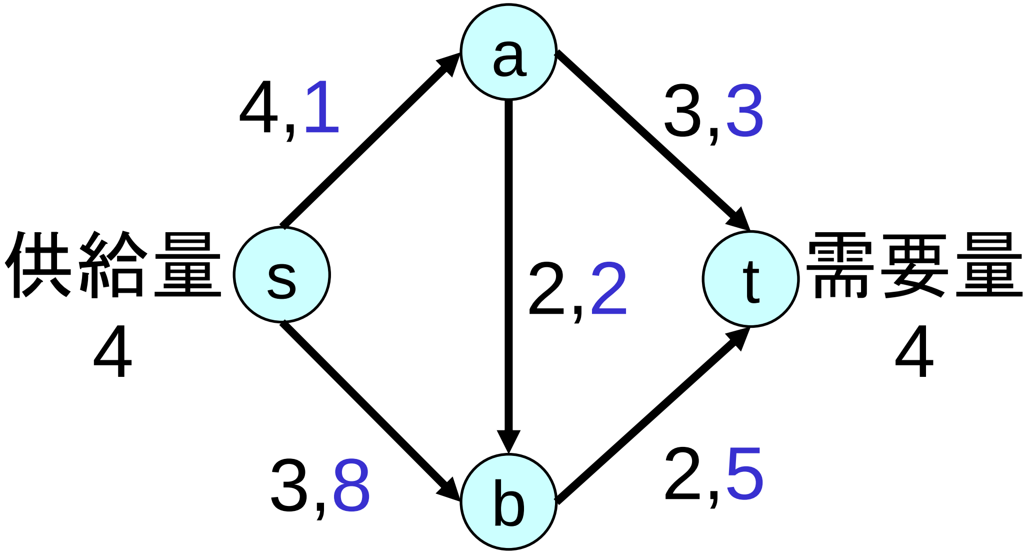
需要供給を満たすフローの求め方

（1）人工問題として最大フロー問題を作る
（2）人工問題の最大フローにおいて
　$f = \alpha$ ⇒ 現在のフローは需要供給を満たす
　$f < \alpha$ ⇒ 需要供給を満たすフローは存在しない



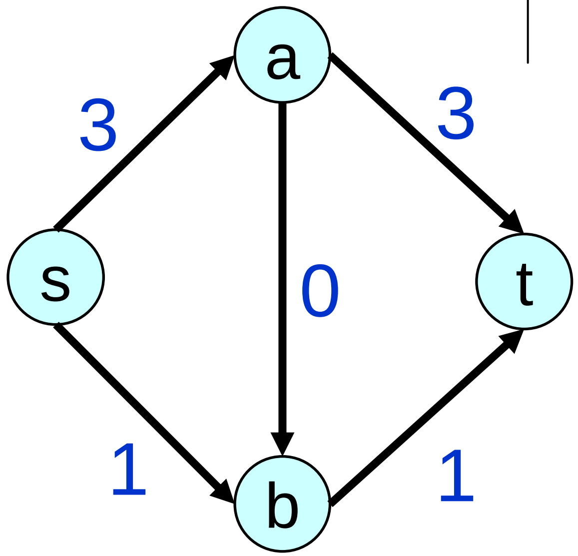
各枝の費用は無視

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大フローのときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

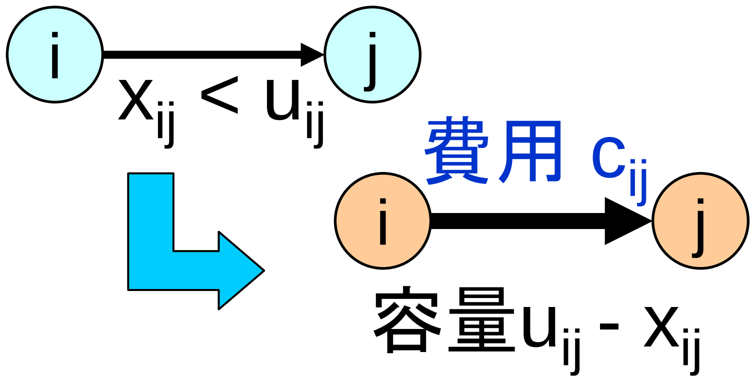
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

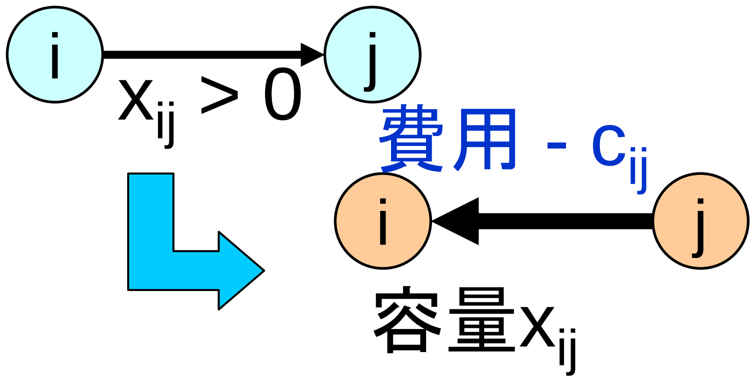
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



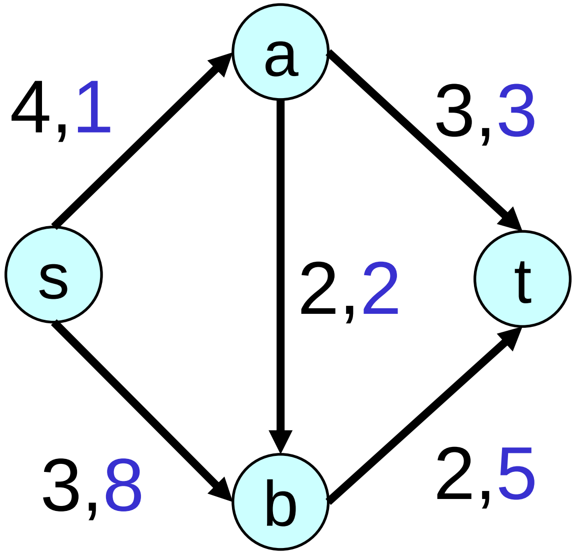
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

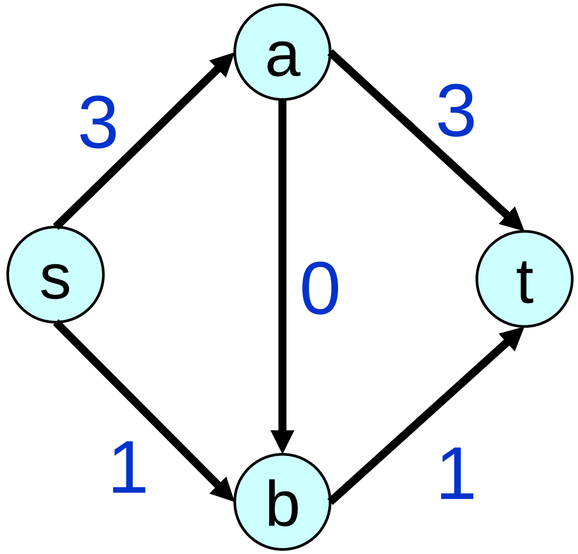
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 - c_{ij}



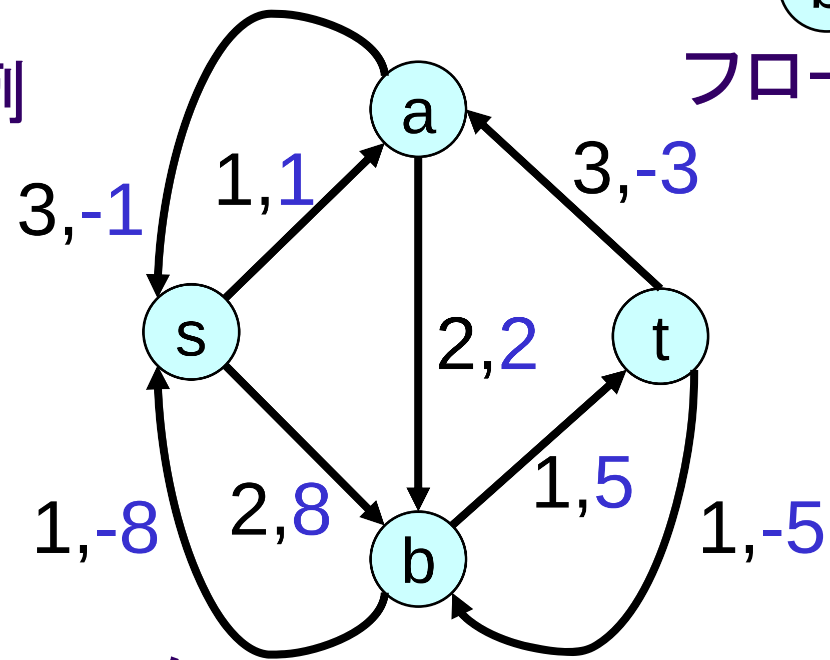
残余ネットワークの作り方（その2）



問題例



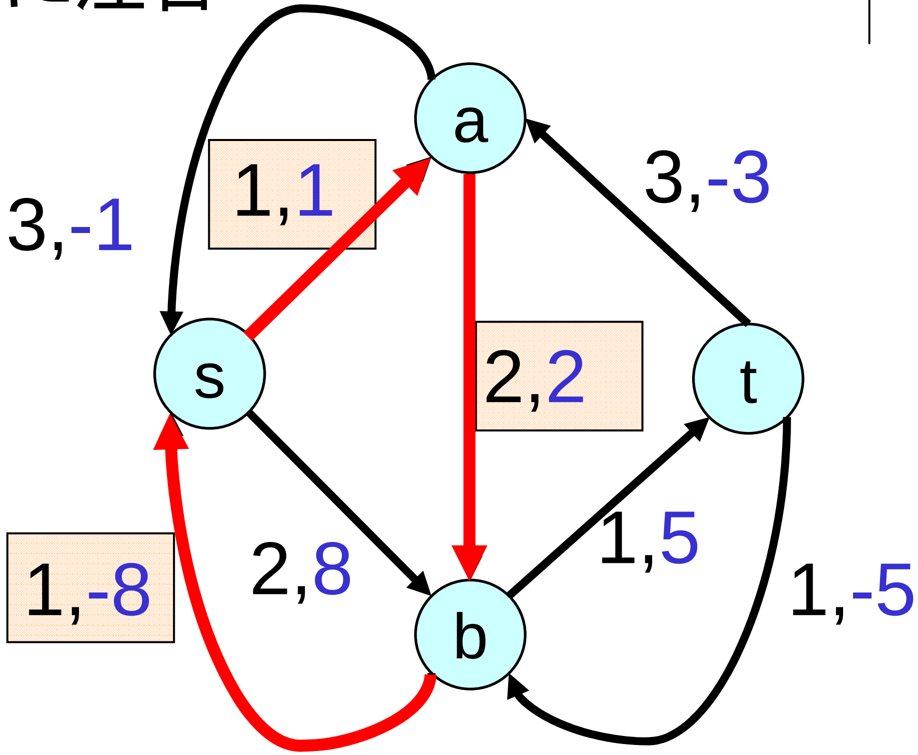
フローの例



残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(その1)

残余ネットワークの閉路に注目



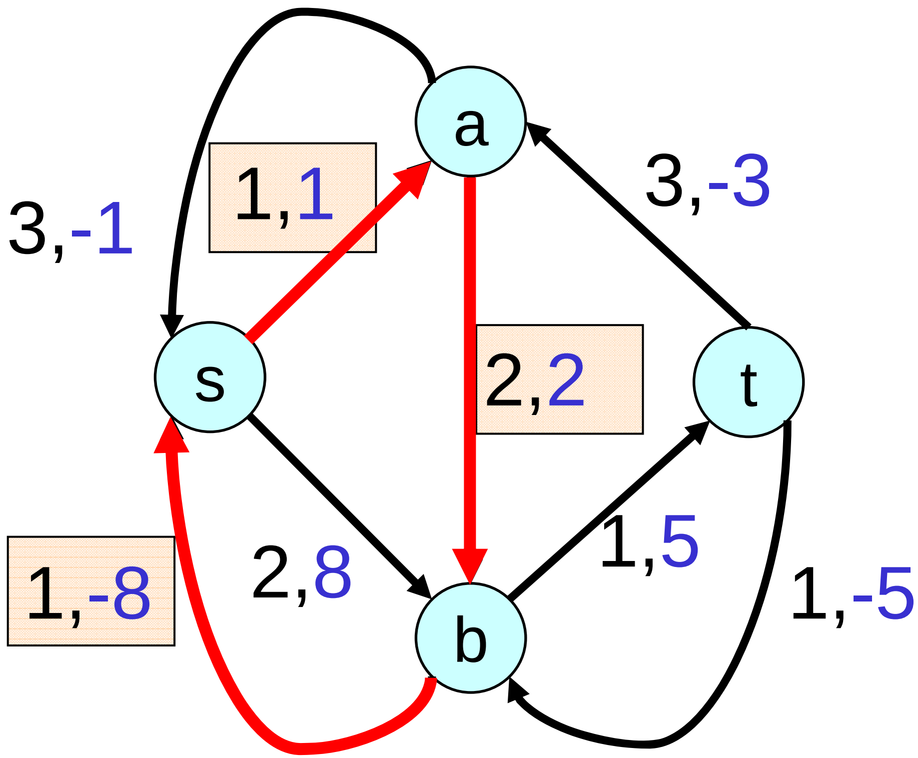
閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の容量の最小値=1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の費用の和=-5

残余ネットワークの性質(その2)

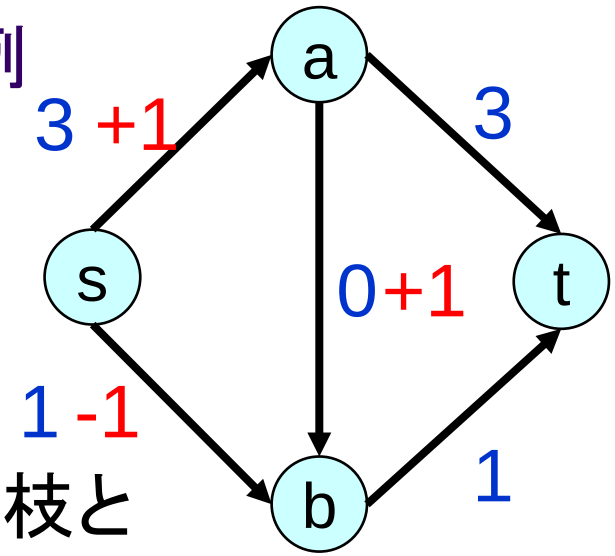
残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

残余ネットワーク



閉路の容量 α=1
閉路の費用 γ=-5

フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋α
逆の向き⇒フロー値に－α
無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用はαγ(＝－5)増加

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

性質：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ(証明は後で)

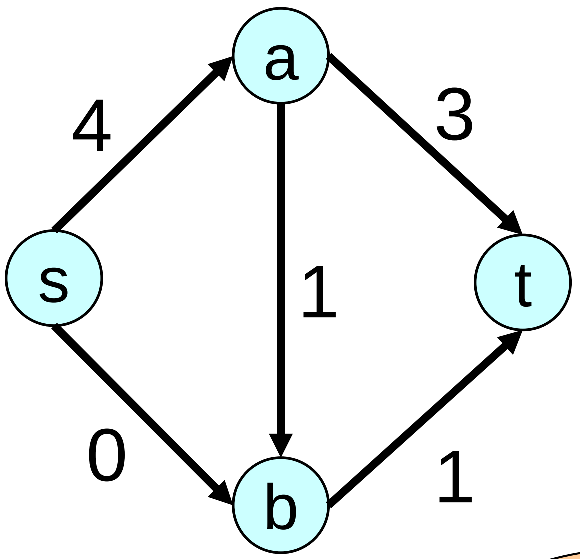
性質：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

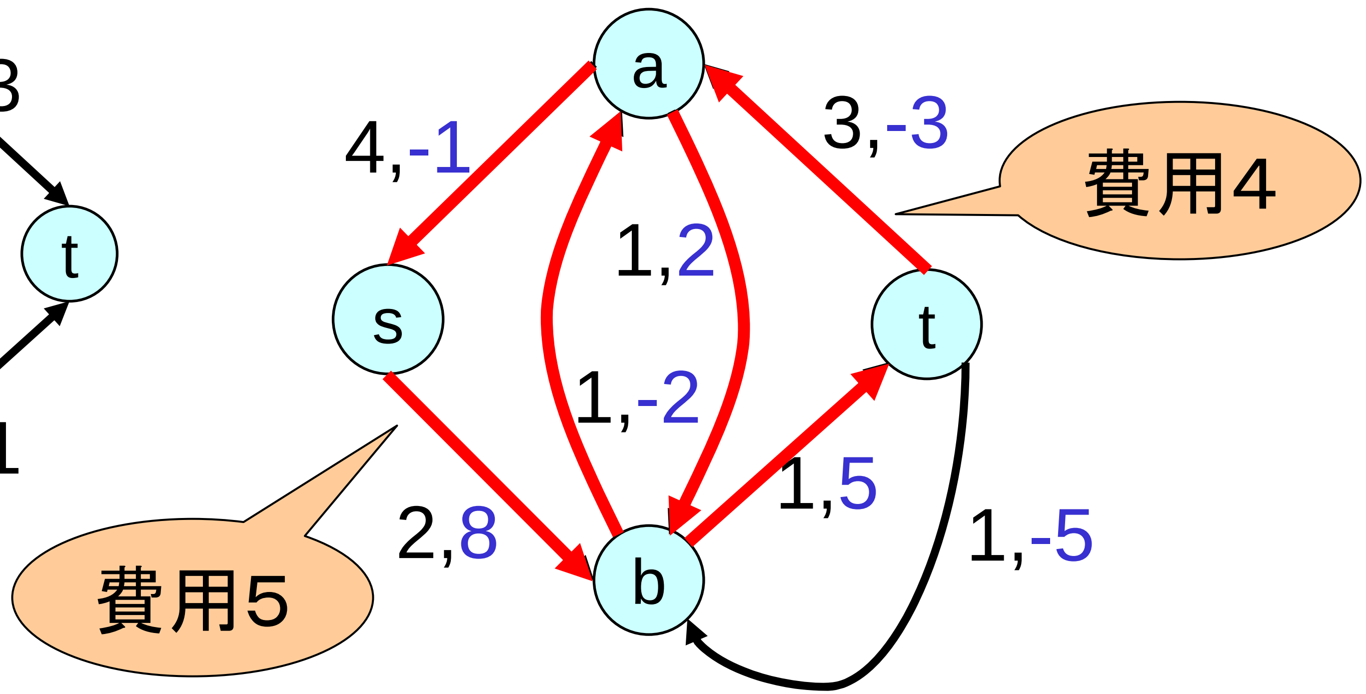
2つの性質をまとめると

定理：現在のフローは費用最小
⇔ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー　　　残余ネットワーク





費用が負の閉路がない
⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去法

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて、需要供給量を満たす
フローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が
存在しない⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

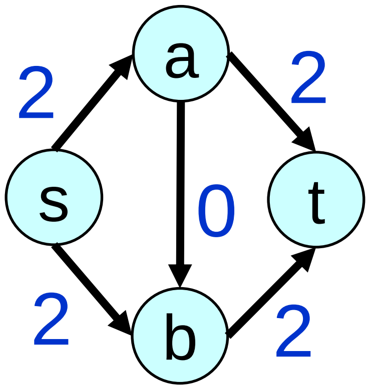
ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、
それを用いて現在のフローを更新する

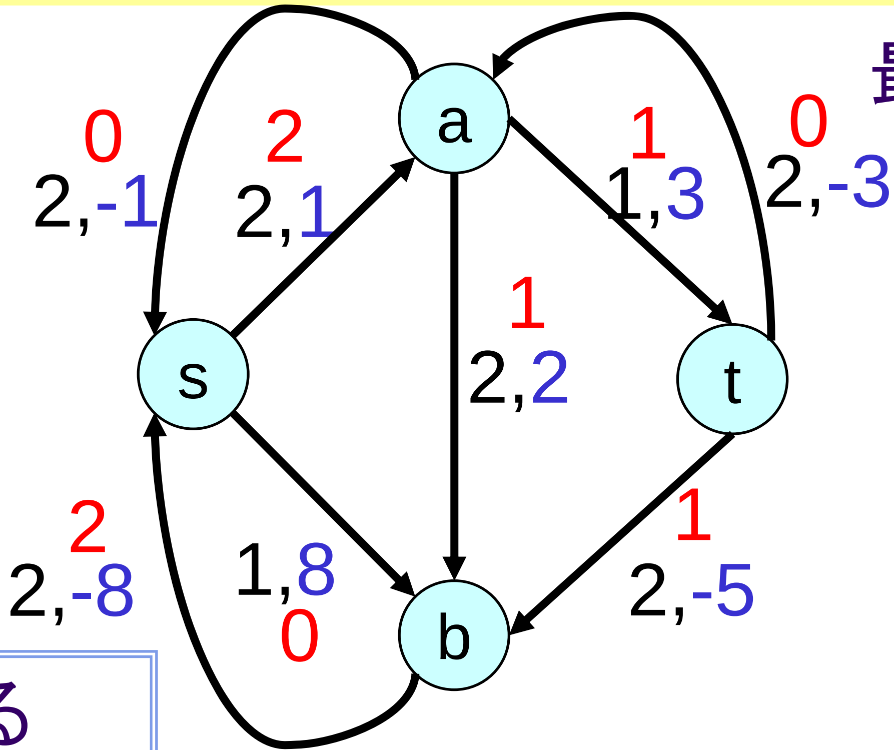
ステップ4：ステップ1へ戻る

性質の証明(その1)

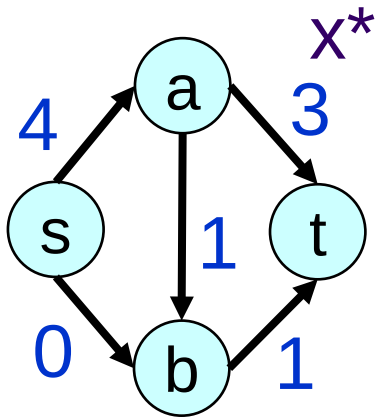
性質：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

現在のフロー x





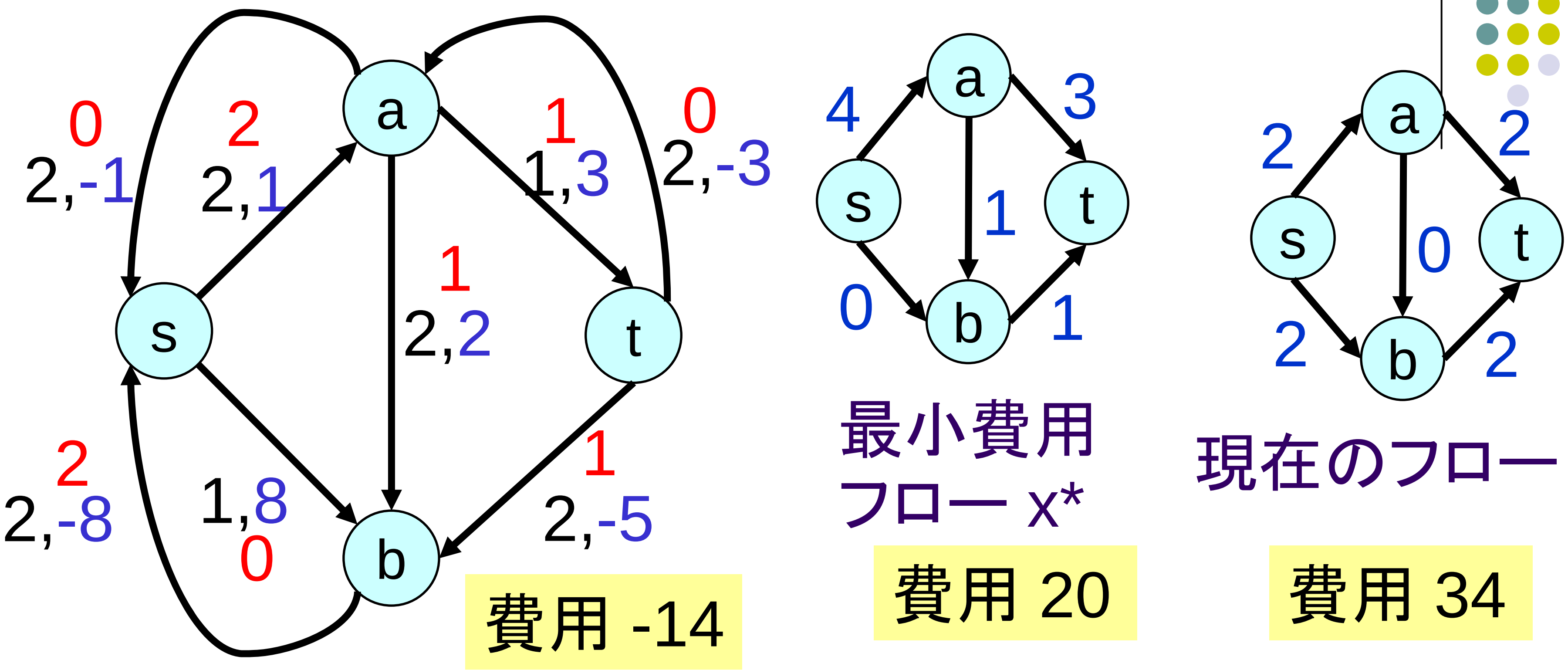
最小費用フロー



フロー x に関する
残余ネットワーク上で
x* と x の差を表現

$x_{ij}^* - x_{ij} \geqq 0$ ⇒ 枝 (i, j) に $x_{ij}^*-x_{ij}$
$x_{ij}^* - x_{ij} < 0$ ⇒ 枝 (j, i) に $x_{ij} - x_{ij}^*$
その他の枝に0

性質の証明(その2)



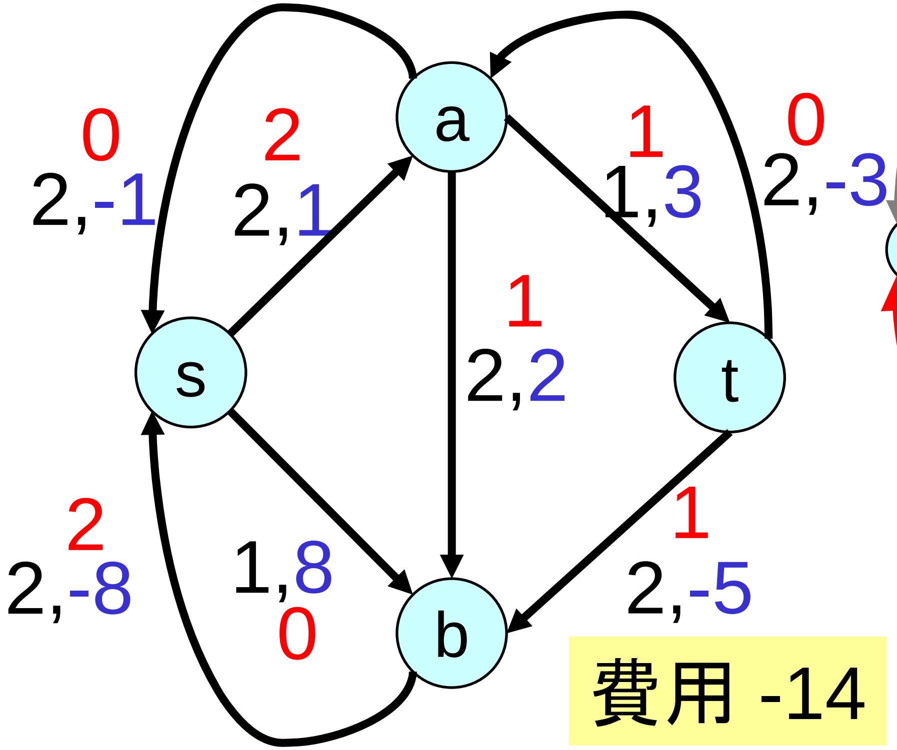
最小費用フロー x*

現在のフロー x

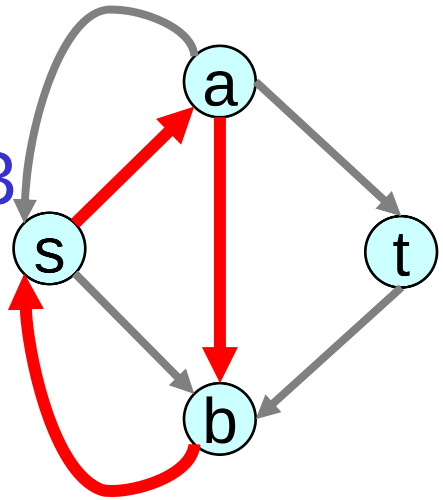
x* と x の差:
x に関する残余ネットワーク上で
容量条件と流量保存則を満たす
⇒ 残余ネットワーク上の
「フロー」

差を表す「フロー」の費用
＝(x* の費用)
ー(x の費用)
< 0

性質の証明(その3)

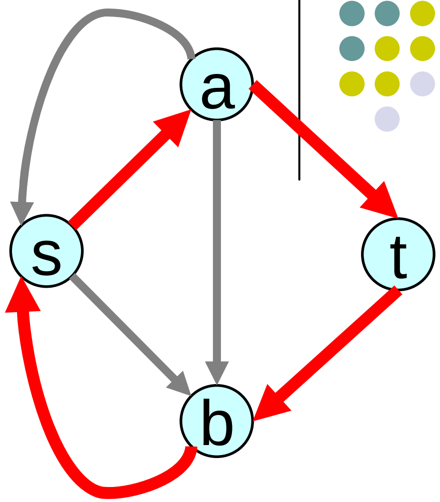


費用 -14



フロー量1

費用 -5



フロー量1

費用 -9

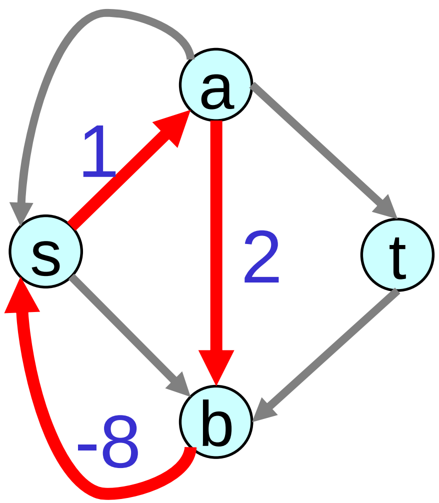
x* と x の差を表す「フロー」:
x に関する残余ネットワーク上で
容量条件と流量保存則を満たす

⇒ 閉路上を流れる
フローに分解可能

差を表す「フロー」の費用
＝閉路上のフローの費用
の合計

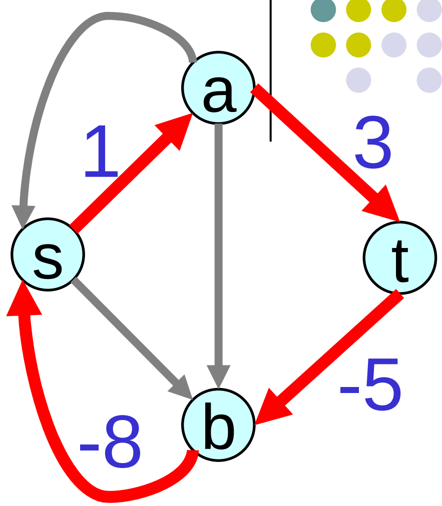
性質の証明(その4)

閉路上のフローの
費用の合計　費用 -14
＝差を表す「フロー」の費用
＜ 0



フロー量1

費用　-5



フロー量1

費用 -9

閉路上を流れるフロー
の費用
＝(閉路の費用)
×(フロー量)

➡ いずれかの閉路の費用は負

➡ x の残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
(証明終わり)

負閉路消去法の計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定
　U = 枝容量の最大値，
　C = 枝費用の絶対値の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU
　➔ 反復回数 ≦ 2mCU 以下
- 各反復での計算時間
　＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間

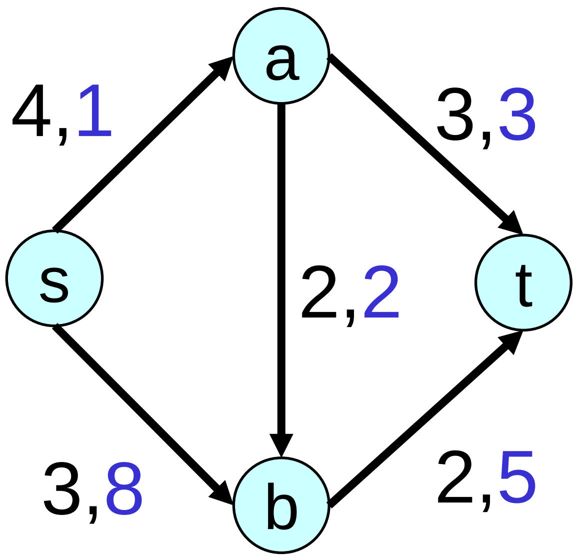
➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は $O(m^2\, n\, C\, U)$
（入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間）

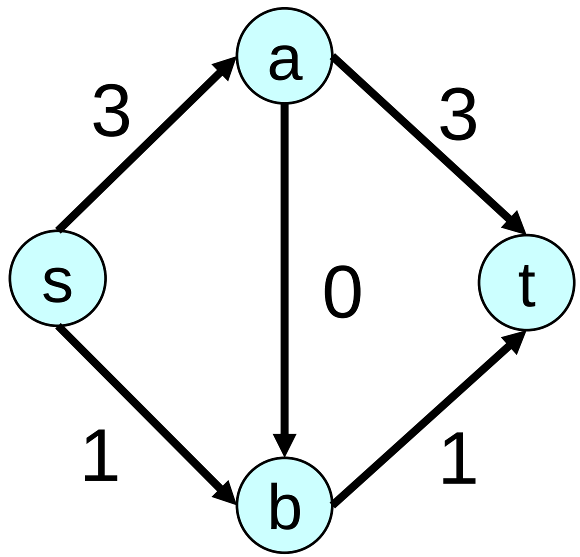
レポート問題

問１：次の最小費用フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）与えられた初期フローに対して負閉路消去法を適用し，
　最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(a)　需要供給量4



初期フロー



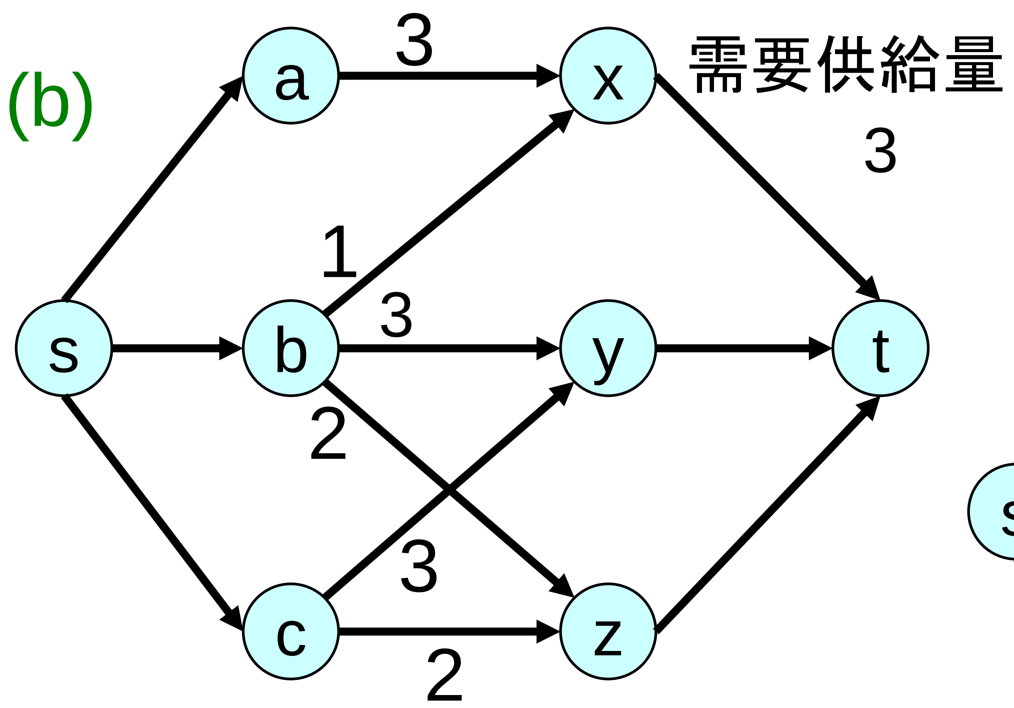
レポート問題

問２：次の最小費用フロー問題に対して、

（1）定式化せよ

（2）負閉路消去法を用いて最小費用フローを求めよ

（途中の計算過程も省略せず書くこと）



各枝の容量は1

s から出る枝と t に入る枝の費用は0

それ以外は各枝の数値を参照

初期フロー