数理計画法　第4回

２．４　単体法

担当：　塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

今後の予定

- １１／２０ 線形計画5回目
- １１／２７ もしくは１２／４　中間試験

今回のレポートは３点満点です

２．４　単体法(simplex method)

- ＬＰの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化　z

条件　$z = 0 \quad + \ c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　**辞書(dictionary)**

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最小化　z

条件

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

$x_1 \geqq 0,\ \ldots,\ x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$$
\begin{aligned}
z &= \quad 0 \quad + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\
&\cdots \\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable)：左辺に表れる変数

基底解(basic solution)：非基底変数を0としたときの解
（許容とは限らない）

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

⇒ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary)：

対応する基底解が許容解の辞書

⇔　基底解の各成分が非負

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒　許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒　許容辞書ではない

辞書の行列表現

辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$

⇒

0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation):より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ x_1の係数 < 0 なので

x_1 を増やす

x_1をαだけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4-2\alpha, 4-2\alpha, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには$\alpha \leqq 2$

ピボット演算（その2）

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

x_1を基底に入れる

x_4を基底から出す

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

ピボット演算2回目（その1）

$$
\begin{aligned}
z &= -4 && + x_4 && + x_2 && - 2\,x_3 \\
x_1 &= 2 && - (½)\,x_4 && - x_2 && + (½)x_3 \\
x_5 &= 0 && + x_4 && + 2x_2 && - 5x_3 \\
x_6 &= 9 && - 2x_4 && - 7x_2 && + 3x_3
\end{aligned}
$$

z を減らしたい

⇒ x_3の係数 < 0 なので

x_3 を増やす

x_3をαだけ増やすと

基底解(2,0,0,0,0,9)

目的関数値 z = -4

目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$

解は

$(2 + (½)\alpha, 0, \alpha, 0, \boxed{0 - 5\alpha}, 9 + 3\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 0$

ピボット演算2回目（その2）

$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$

$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_3, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_5)

x_3を基底に入れる

x_5を基底から出す

$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

ピボット演算に関する用語

- 1回目のピボット演算

  基底解　(0,0,0,4,4,1)　→　(2,0,0,0,0,9)

  非退化(nondegenerate)：基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

  基底解　(2,0,0,0,0,9)　→　(2,0,0,0,0,9)

  退化(degenerate)：基底解が変化しない

最適性の判定

$$z = -4 \boxed{+ (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5}$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

⇩

任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geqq -4$

⇩

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は $z = -4$ なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 + \boxed{2x_1} - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 + \boxed{2x_1} - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + \boxed{4x_1} - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1の係数 $= -2 < 0$ なので

x_1 を増やす ⇒ z が減る

x_1をα増やすと

解は

$(\alpha, 0, 0, 4+2\alpha, 4+2\alpha, 1+4\alpha)$

目的関数値 $z = -2\alpha$

αを任意に増やしても解は許容

⇒ 非有界

単体法の流れ

- 入力：許容辞書（および基底）
- 出力：有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1：最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 x_s にする

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒x_s を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数 x_t にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x3 \geqq 0$

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$

対処法は次回の講義で説明

- 反復回数は有限回か？

巡回(cycling) ー 同じ辞書が繰り返し現れること

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると，辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個

- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない➔辞書が無限に生成される
  ➔同じ辞書が何回も現れる
  ➔巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは目的関数値が変化しない

最小添字規則

ピボット演算のとき、
最小添字規則(smallest subscript rule)を適用
⇒ 有限反復で終了

基底に入る
変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る
変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: $0 \to 0 - 2\alpha$

x_5: $0 \to 0 - 3\alpha$

x_6: $0 \to 0 + 5\alpha$

$\therefore$ α は最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意：x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例(つづき)

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

その他のピボット規則

- 最大係数規則
  - z の式での係数が最小（絶対値が最大）の非基底変数を選ぶ

入る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-3	-1	-2
x_4	3	-2	1	-1
x_5	1	-3	1	-1
x_6	4	5	-1	2

その他のピボット規則

- 最大改善規則
  - 一回のピボット演算での目的関数値の減少量が最大となるように，非基底変数を選ぶ

入る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-3	-1	-2
x_4	3	-2	1	-1
x_5	1	-3	1	-1
x_6	4	5	-1	2

	変数の増加量		zの式での変数の係数		目的関数値の減少量
x_1 ➔	1/3	×	(-3)	=	-1
x_2 ➔	4	×	(-1)	=	-4
x_3 ➔	1	×	(-2)	=	-2

その他のピボット規則

- 最大係数規則
  - z の式での係数が最小（絶対値が最大）の非基底変数を選ぶ
- 最大改善規則
  - 一回のピボット演算での目的関数値の減少量が最大となるように，非基底変数を選ぶ

- いずれの方法とも
  - 実用的には良い性能（反復回数が少ない）
  - 巡回を防ぐとは限らない

単体法の反復回数

- 実験的には反復回数は少ない
  - 反復回数 ≦ 制約の数×３
  - 変数の数が増えても，反復回数はあまり増えない（log n)
- しかし，指数回の反復回数を要する問題例が存在
  - 反復回数が 2^n-1 となる例がある（Klee & Minty 1972）
- でも，反復回数が多い問題に出くわすことは滅多にない

指数回の反復を要する問題例

最大化 $\displaystyle \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$

条件 $\displaystyle \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} \ (i = 1, 2, ..., n)$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., n)$

n = 4 のときは以下の通り

最大化 $1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$

条件 $x_1 \leq 0$

$2(10x_1) + x_2 \leq 100$

$2(100x_1 + 10x_2) + x_3 \leq 10000$

$2(1000x_1 + 100x_2 + 10x_3) + x_4 \leq 1000000$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$

今週のレポート問題

- 教科書82ページ問2．14
- 教科書82ページ問2．15
- 次のLP（許容辞書）

を単体法で解け

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

締め切り　11月20日（木）