数理計画法　第3回

２．３　諸定理

担当：　塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

今後の予定

- １０／２３（今日） 線形計画2回目
- １０／３０ 出張のため休講
- １１／６　 3年生研究室見学会のため休講
- １１／１３ 線形計画3回目

主問題と双対問題

主問題(primal problem)

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

双対問題(dual problem)

最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

主問題の i 番目の不等式
$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqq b_i$

対応

双対問題の i 番目の変数
$y_i \geqq 0$

主問題の j 番目の変数
$x_j \geqq 0$

対応

双対問題の j 番目の不等式
$a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\cdots+a_{mj}y_m \leqq c_j$

弱双対定理

弱双対定理 (weak duality theorem)

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

xの目的関数値 $\sum_j c_j x_j \geqq \sum_i b_i y_i$ yの目的関数値

弱双対定理の系

系2．１
主問題が非有界 ⇒ 双対問題は実行不可能
双対問題が非有界 ⇒ 主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対：実行可能⇒主：有界） を示す

双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、 $\alpha = \Sigma b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha \quad \therefore \text{ 主問題は有界}$$

弱双対定理の系

系2．２

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒　**x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理（定理2．2）を使って証明すること

弱双対定理の系

例2．３

最小化	$-2x_1 - x_2 - x_3$
条件	$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$
	$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$
	$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$
	$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最大化	$-4y_1 - 4y_2 - y_3$
条件	$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$
	$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$
	$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$
	$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒　系2．2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理２．３（双対定理 duality theorem）

主問題または双対問題が最適解をもつ

⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明は次回

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○（双対定理）	×（系2．1）	×（双対定理）
		非有界	×（系2．1）	×（系2．1）	○（系2．1）
	実行不可能		×（双対定理）	○（系2．1）	○

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理2．4:

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解

⇕

相補性条件 (complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\Sigma_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\Sigma_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

$\Sigma_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　$(\forall j = 1, 2, \ldots, n)$

$\Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$　$(\forall i = 1, 2, \ldots, m)$

証明:　　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\Sigma_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\Sigma_j a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　⇔　相補性

今週のレポート問題

- 教科書81ページ問2. 11
- 教科書81ページ問2. 12

締め切り　11月13日（木）