

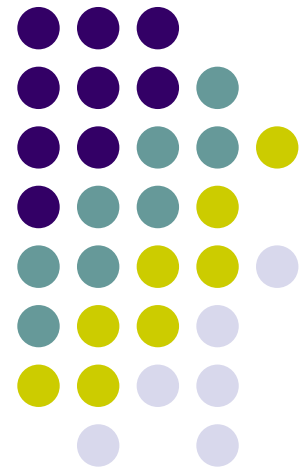
数理計画法 第3回

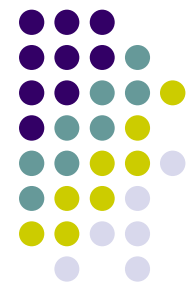
2.3 諸定理

担当： 塩浦昭義 Akiyoshi Shioura

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp





今後の予定

- 10／23(今日) 線形計画2回目
- 10／30 出張のため休講
- 11／6 3年生研究室見学会のため休講
- 11／13 線形計画3回目

主問題と双対問題



主問題 (primal problem)

双対問題 (dual problem)

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

最大化 $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

条件 $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$

...

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

主問題の i 番目の **不等式**

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$



双対問題の i 番目の **変数**

$y_i \geq 0$

主問題の j 番目の **変数**

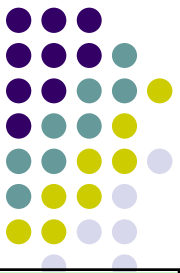
$x_j \geq 0$



双対問題の j 番目の **不等式**

$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j$

弱双対定理



弱双対定理 (weak duality theorem)

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

xの目的関数値

$$\sum_j c_j x_j \geq \sum_i b_i y_i$$

yの目的関数値

弱双対定理の系



系2. 1

主問題が**非有界** \Rightarrow 双対問題は**実行不可能**

双対問題が**非有界** \Rightarrow 主問題は**実行不可能**

証明: 対偶 (双対: 実行可能 \Rightarrow 主: 有界) を示す

双対問題が実行可能と仮定

y : 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$$\sum c_j x_j \geq \alpha \quad \therefore \text{主問題は有界}$$

弱双対定理の系



系2. 2

\mathbf{x} : 主問題の許容解, \mathbf{y} : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

⇒ \mathbf{x} : 主問題の最適解、 \mathbf{y} : 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理2. 2)を使って証明すること

弱双対定理の系



例2.3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$

$$-2y_1 \quad - 3y_3 \leq -1$$

$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解

$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒ 系2.2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理



定理2.3 (双対定理 duality theorem)

主問題または双対問題が最適解をもつ

⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明は次回

主問題と双対問題の答えの組合せ



			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ (双対定理)	× (系2. 1)	× (双対定理)
		非有界	× (系2. 1)	× (系2. 1)	○ (系2. 1)
	実行不可能	× (双対定理)	○ (系2. 1)	○	

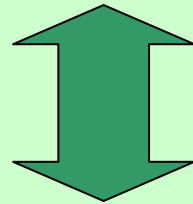
相補性定理 (complementarity slackness theorem)



定理 2.4:

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

x 、 y は最適解



相補性条件
(complementarity
slackness condition)

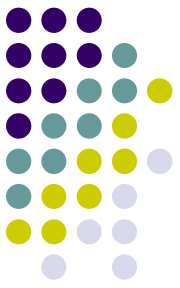
各 $j = 1, \dots, n$ について

$\sum_i a_{ij} y_i \leq c_j$ と $x_j \geq 0$ のどちらかは等号成立

各 $i = 1, \dots, m$ について

$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$ と $y_i \geq 0$ のどちらかは等号成立

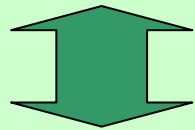
相補性定理の証明



x: 主問題の許容解

y: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解



$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j \quad \text{または} \quad x_j = 0 \quad (\forall j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \text{または} \quad y_i = 0 \quad (\forall i = 1, 2, \dots, m)$$

証明: 弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

x、**y**が最適 \Leftrightarrow 最初の項 = 最後の項

$$\Leftrightarrow (\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j, (\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i \quad \Leftrightarrow \text{相補性}$$

今週のレポート問題

- 教科書81ページ問2. 11
- 教科書81ページ問2. 12

締め切り **11月13日(木)**

