数理計画法　第2回

２．１　線形計画問題と
　　　　その標準形
２．２　双対問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/mp08/

今日の講義の流れ

- 不等式標準系，等式標準系
- 双対問題
- LPの諸定理

2．線形計画
2．1　線形計画問題とその標準形

線形計画問題（LP）の定義

- 目的関数が線形関数，制約式も線形式の最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　$5x + 3z \leqq 8$

$2z = 2$

$4y + z \geqq 9$

$x, y \geqq 0$

制約式は「≧」「＝」「≦」
どれでもよい

制約式は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

LPの不等式標準形

任意の形のLPを扱うのは面倒

⇒ 不等式標準形

- ◆目的は最小化
- ◆制約式は「左辺≧右辺」の形
- ◆各変数は非負

最小化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$$

不等式標準形への変形

命題2．1：任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

【目的関数の－１倍】 最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longrightarrow \quad \text{最小化} \quad -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約の－１倍】 不等式を "≦" から "≧" へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \quad \Longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge -b$$

不等式標準形への変形

【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

x_j（非負制約なし） ⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2}$, $x_{j1} \geqq 0$, $x_{j2} \geqq 0$

不等式標準形への変形の例

最大化　$3x + 2y$

条件　$x + y = 1$

$x \geqq 0$

最大化　$3x + 2(y_1 - y_2)$

条件　$x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件　$x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件　$x + (y_1 - y_2) \leqq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件　$-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$

$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$

$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟹ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⟹ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし$s_{j1} = s_j,\ s_{j2} = 0$（$s_j \geqq 0$ のとき）

$s_{j1} = 0,\ s_{j2} = -s_j$（$s_j < 0$ のとき）

例：$(x, y) = (3, -2)$ は　$x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

$\Rightarrow (x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⟹ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⟹ $(t_1, \ldots, t_{j1}-t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

例: $(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x,\ y_1,\ y_2 \geqq 0$ を満たす

⇒ $(x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は $x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

等式標準形

- LPの**等式標準形**

◆目的は**最小化**

◆制約は**等式**

◆各変数は**非負**

最小化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$

$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \ldots,\ x_n\geqq 0$

等式標準形への変形

命題2．2：任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる（命題2．1）
- 不等式「左辺≧右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数 x_{n+i} を利用
（スラック変数）

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

⟹

$4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0$

双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい
  （最適値の下界値の計算）

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$　①

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$　②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$　③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

⇒ 制約を足し合わせてみる

- 目的関数≧②×3＋③＝ $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geqq -13$
- 目的関数≧①×0.5＋②×0.5＝ $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geqq -4$

より良い下界

双対問題

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$　①

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$　②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$　③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

より一般に，非負実数

y_1, y_2, y_3 を使うと

①$\times y_1$＋②$\times y_2$＋③$\times y_3$

左辺：$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$

右辺：$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\ -2y_1 \qquad - 3y_3 &\leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \end{aligned}\right\}$$

が成り立つならば

目的関数≧左辺≧右辺

$= -4y_1 - 4y_2 - y_3$

双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなLP

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\
\text{条件}\quad & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\
& -2y_1 - 3y_3 \leqq -1 \\
& y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1 \\
& y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

もとの問題に
対する
双対問題

もとの問題・・・・主問題

主問題と双対問題

主問題

最小化　$c_1x_1+\cdot\cdot\cdot+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdot\cdot\cdot+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdot\cdot\cdot+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdot\cdot\cdot+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

双対問題

最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdot\cdot\cdot+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdot\cdot\cdot+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdot\cdot\cdot+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdot\cdot\cdot+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

最小化　$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

条件　$A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

行列表現

最大化　$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

条件　$A^T\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$

主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順（１）双対問題を不等式標準形に書き換え

（２）書き換えた問題の双対問題をつくる

（３）得られた双対問題を変換すると

もとの問題に一致することを確かめる.

等式標準形の双対問題

- LPの等式標準形

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$$

不等式標準形に
変換

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i\,, \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i = 1,2,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$$

等式標準形の双対問題

双対問題をつくる

最大化 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i''$

条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i'' \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

$y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0 \quad (i = 1,2,...,m)$

$y_i' - y_i''$ を

非負制約なし変数

y_i に置き換え

最大化 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

等式標準形のLPに対する双対問題

諸定理　—　LPの基本定理

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能⇔許容解が存在する
- 実行不可能⇔許容解が存在しない

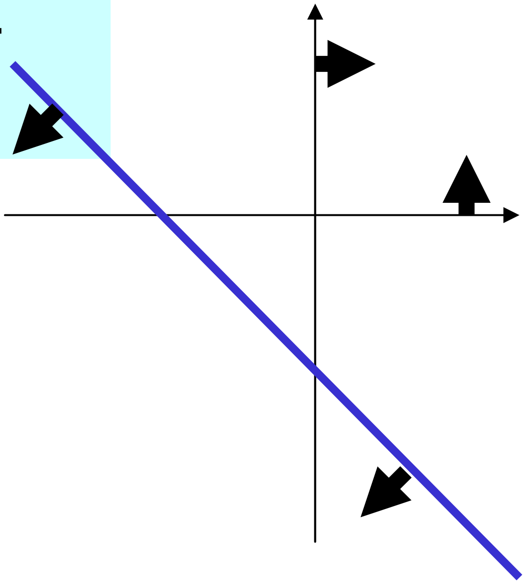
最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

実行不可能



LPの基本定理(その2)

定義:実行可能なLPは (最小化の場合)

- 有界 ⇔ 任意の許容解の目的関数値が ある定数より大きい
- 非有界 ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 $x + 2y$
条件 $-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

最小化 $-x - y$
条件 $x + y \geqq 0$
$x, y \geqq 0$

有界

目的関数値≧0

非有界

任意の $\alpha>0$ に対し (α, α) は許容解

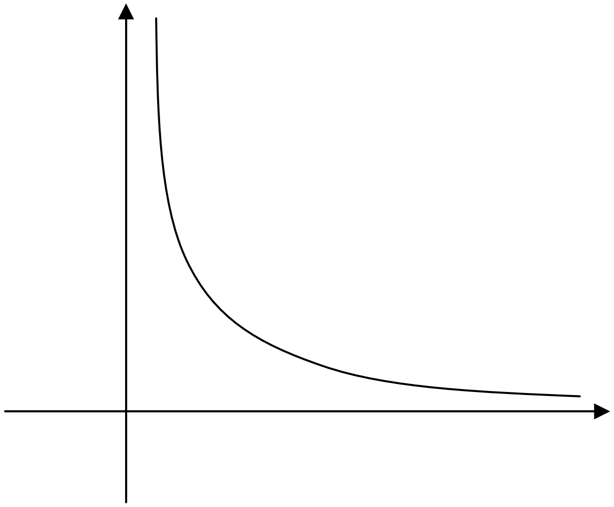
目的関数値＝-2α

LPの基本定理（その3）

定理2．1（基本定理）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化　y
条件　$xy \geqq 1$
$x, y \geqq 0$



最適値＝０
でもｙ＝０なる許容解はない

弱双対定理(その1)

定理２．２(弱双対定理)

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理(その2—証明)

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件

$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

…

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件

$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

…

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理(その3ー系)

系2．1
主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能
双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

証明: 対偶　(双対:実行可能⇒主:有界)　を示す
双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、　$\alpha = \Sigma b_i y_i$
弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha \qquad \therefore \text{ 主問題は有界}$$

弱双対定理(その4－系)

系2．２
x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理2．2)を使って証明すること

弱双対定理(その5ー系)

例2．3

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最大化　$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件　$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$

⇒　系2．2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理２．３:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○（双対定理）	×（系2．1）	×（双対定理）
		非有界	×（系2．1）	×（系2．1）	○（系2．1）
	実行不可能		×（双対定理）	○（系2．1）	○

今週のレポート問題

- 80ページ問2．1
- 81ページ問2．4
- 双対問題の双対問題が主問題に一致することを示せ.
- 81ページ問2．８（系2.2の証明）
- 次のような線形計画問題の例を示せ.
  - （1）主問題，双対問題共に最適解をもつ
  - （2）主問題は非有界，双対問題は実行不可能

締め切り　10月23日（木）
提出は授業開始後10分以内に.
それ以降は受け取りません.
情報科学研究科の私の研究室に持ってきてもOK.

※来週は休講です