数理計画法 第12回(最終回)

第3章　非線形計画

3.3　制約つき最適化

担当:　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

期末試験と単位について

期末試験

- 日時:1月31日午後1時～2時半
- 試験範囲:
  - ■ネットワーク計画(最大フロー、最小費用フロー)
  - ■非線形計画(制約なし最適化，制約付き最適化)
- 教科書、ノートなどの持ち込みは一切不可
- 座席はこちらで指定します

単位について

単位が心配な場合は必ず問い合わせをしてください
問合せの締切:2月8日(金)午後6時まで
それ以降は一切成績の変更は出来ません
期末試験等の得点の問合せはいつでも可能です

制約つき最適化問題

入力: 目的関数 f(x)
制約を表す関数 $g_i(x)$ (i = 1, 2, …, m)

最小化　f(x)
条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

極小解: x* の付近だけに注目したとき、x* は最小

ある $\delta > 0$ が存在して、$\|x - x^*\| \leqq \delta$ を満たす
すべての許容解 x に対して $f(x) \geqq f(x^*)$

最適解ならば極小解

制約つき問題の一般的な解法

- ペナルティ関数法
- バリア関数法

　後で説明

- 内点法　KKT条件を満たす解を反復計算により求める
- 逐次2次計画法　2次関数の問題に繰り返し近似して解く

などなど

- ■ いずれも，極小解(の近似解)を求めることが目的
- ■ 目的関数および制約が凸関数のときは最適解(の近似解)が得られる

ペナルティ関数法

制約つき問題を制約なし問題へ変換して解く

最小化　f(x)　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, …, m)

ペナルティ関数の導入

$\mathbf{P}$(x): x が制約を満たすとき ＝0

満たさないとき ＞0

なるべく制約を満たしてほしい（ペナルティ関数）

最小化　f(x)＋$\mu\mathbf{P}$(x)　条件　なし　　μ＞0は定数

ペナルティ問題

最急降下法，ニュートン法などを利用して解ける

ペナルティ関数法

ペナルティ関数の例

条件 $g_i(x) \leq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ に対して

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \max(g_i(x), 0)$$

$$\max(g_i(x), 0) = \begin{cases} 0 & (g_i(x) \leq 0) \\ g_i(x) & (g_i(x) > 0) \end{cases}$$

条件 $g_i(x) = 0\ (i = 1, \ldots, m)$ に対して

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2$$

ペナルティ関数法

ペナルティ問題

最小化　f(x)＋$\mu\mathbf{P}$(x)　条件　なし　　μ＞0は定数

μ が0に近い

⇒ペナルティ関数の項 $\mu\mathbf{P}$(x) は十分小さい

⇒ペナルティ問題の最適解≒最小化 f(x) の最適解

⇒ペナルティ問題の最適解は求めやすい

μ が十分大きい

⇒ペナルティ問題の最適解は$\mathbf{P}$(x)≒0を満たす

⇒x はもとの問題の制約をほぼ満たす

⇒x はもとの問題の最適解に近い

ペナルティ関数法

ペナルティ問題

最小化　f(x)＋$\mu\mathbf{P}$(x)　条件　なし　　μ＞0は定数

ペナルティ関数法の流れ

1. 適当に μ の値を定める.
2. ペナルティ問題の最適解x_μを求める.
3. x_μ が最適解に近い⇒終了
4. μ を大きい値に変更，2に戻る.

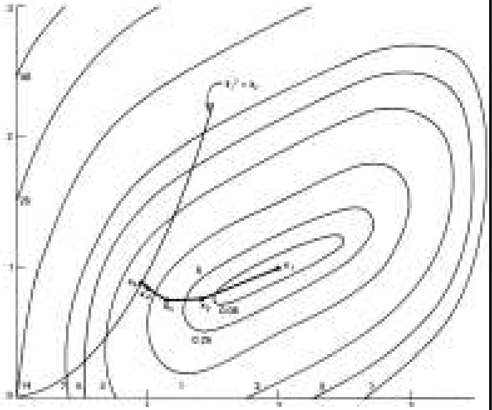
x_μ は最初は制約を満たさない
⇒　徐々に満たすようになる

ペナルティ関数法の実行例

最小化　$(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$

条件　　$x_1^2-x_2=0$

μ	ペナルティ問題の最適解
0.1	(1.453, 0.7608)
1.0	(1.168, 0.7407)
10.0	(0.9906, 0.8425)
100.0	(0.9507, 0.8875)
1000.0	(0.9461, 0.8934)



バリア関数法

制約つき問題を制約なし問題へ変換して解く

最小化　f(x)　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, …, m)

バリア関数の導入

制約を必ず満たしてほしい

B(x): 制約を満たすx に対して定義される

x が許容解領域の境界に近づくときB(x)→∞

（バリア関数）

最小化　f(x)＋μB(x)　条件　なし

バリア問題　　μ＞0は定数

最適解は，もとの問題の制約を必ず満たす

バリア関数法

バリア関数の例

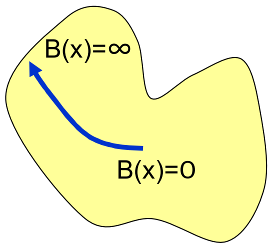
条件 $g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$ に対して

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

条件 $x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$ に対して

$$B(x) = -\sum_{j=1}^{n} \log x_j$$

許容解領域



xが領域の中央部にある➔B(x)は0に近い

xが領域の境界に近づく➔B(x)は∞に発散

バリア関数法

バリア問題

最小化　f(x)＋μB(x)　条件　なし　　μ＞0は定数

μが十分大きい

⇒バリア関数の項 μB(x) は十分大きい

⇒バリア問題の最適解≒最小化 B(x) の最適解

⇒バリア問題の最適解は求めやすい

μが0に近い

⇒バリア関数の項μB(x)は十分小さい

（ただし，x が許容解領域の境界に近づくと∞）

⇒バリア問題の最適解≒元の制約付き問題の最適解

バリア関数法

バリア問題

最小化　$f(x)+\mu B(x)$　条件　なし　　$\mu>0$は定数

バリア関数法の流れ

1. μの値を十分大きな正の値に定める.
2. バリア問題の最適解x_μを求める.
3. x_μが最適解に近い⇒終了
4. μを小さい値に変更，2に戻る.

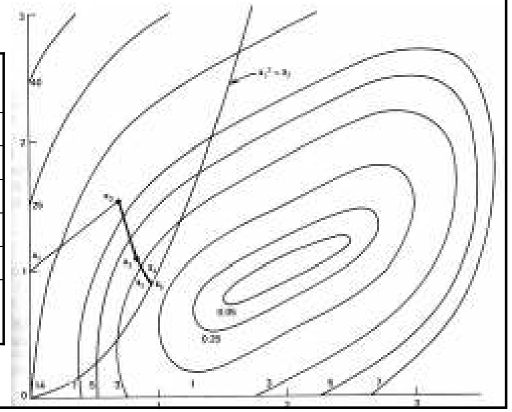
x_μは最初は最適解から遠い許容解
⇒　徐々に最適解に近づく

バリア関数法の実行例

最小化　$(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$

条件　$x_1^2-x_2\leqq 0$

μ	バリア問題の最適解
10.0	(0.7079, 1.5315)
1.0	(0.8282, 1.1098)
0.1	(0.8989, 0.9638)
0.01	(0.9294, 0.9162)
0.001	(0.9403, 0.9011)
0.0001	(0.94389, 0.89635)



研究室配属方法について

- 以前紹介した方法：
  - 学生の満足度の合計を最大化
  - 全体としてはベストの配属法
  - でも，個々の学生，研究室にとっては不満が生じる可能性がある

研究室配属方法について

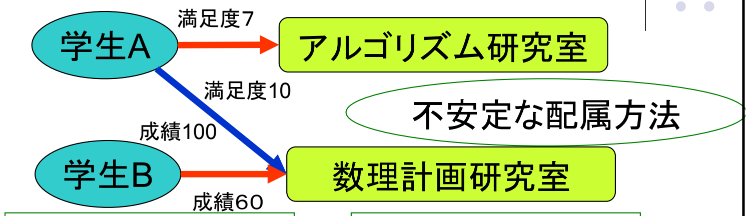
学生A → アルゴリズム研究室

学生B → 数理計画研究室

学生の満足度	アルゴ	数理
学生A	７	１０
学生B	３	７

満足度の合計が最大の割当

研究室配属方法について



学生Aにとって数理計画研究室の方が好ましい

数理計画研究室にとって学生Aの方が好ましい

学生の満足度	アルゴ	数理
学生A	7	10
学生B	3	7

試験の成績	アルゴ	数理
学生A	80	100
学生B	90	60

安定な研究室配属

安定な配属案:次のような不満が生じない配属案

■Y研究室に配属されていない学生Xに対し,

- □Y研究室は現在のある配属学生よりXのほうが欲しい
- □学生Xの現在の配属先よりY研究室の方が好き

→ 「安定結婚問題」として定式化

安定結婚問題

■n人の男性をn人の女性に割り当てたい
■男性は女性に対する選好順序をもつ
■女性は男性に対する選好順序をもつ

例:n=3の場合

男A:123 女1:BAC
男B:312 女2:BAC
男C:132 女3:CAB

男性Aは女性1,女性2,女性3の順に好き
女性1は男性B,男性A,男性Cの順に好き

割当の例:A−1,B−3,C−2

安定結婚問題

■現在の相手から離れて駆け落ちする男女のペアが存在しないように割り当てる(安定な割当を求める)

例:n=3の場合

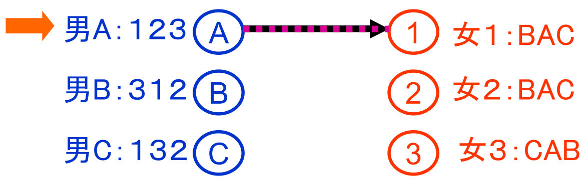
男A:123 女1:BAC
男B:312 女2:BAC
男C:132 女3:CAB

安定な割当の例:
A−2,B−3,C−1

割当の例:A−1,B−3,C−2
男性Cは現在のパートナー(女性2)より女性3が好き
女性3は現在のパートナー(男性B)より男性Cが好き
→ 男性Cと女性3は駆け落ちする(割当は不安定)

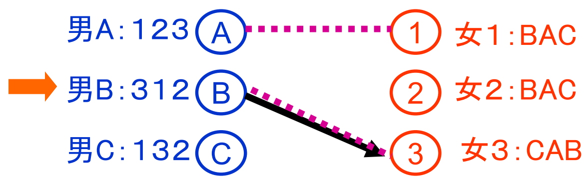
安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする



安定な割当を求めるアルゴリズム

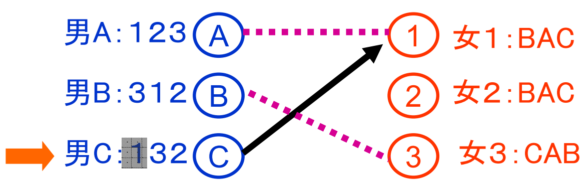
1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする



安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは

   (b)仮パートナーZがいる
   　(b-i) XよりZが好き➔XのパートナーFE候補リストからYを削除

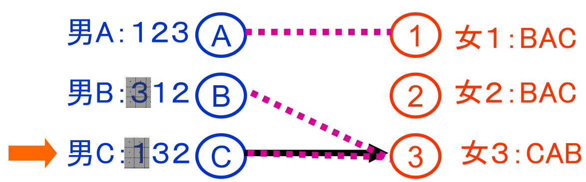


安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは

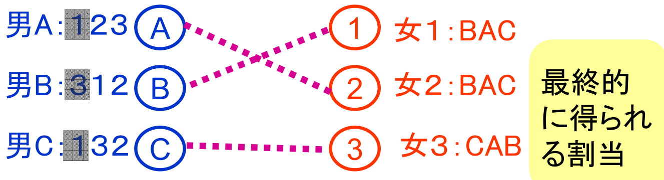
   (b)仮パートナーZがいる

   　(b-ii) ZよりXが好き➔Yの仮パートナーをXに変更，
   　　　　Zのパートナー候補リストからYを削除



安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする
   (b)仮パートナーZがいる
      (b-i) XよりZが好き➔XのパートナーリストからYを削除
      (b-ii) ZよりXが好き➔Yの仮パートナーをXに変更，
      ZのパートナーリストからYを削除



演習問題（レポート提出の必要なし）

問題４： 下記の問題例に対し，説明したアルゴリズムを使って安定な割当を求めなさい．

また，男女の立場を入れ替えてアルゴリズムを適用し，安定な割当を求めなさい．

男A:2413　女1:BADC
男B:3142　女2:DCAB
男C:2314　女3:ADCB
男D:4132　女4:BADC