レポート問題

（1）関数 $f(x,y)=x^2-xy+2y^2-2x+e^{x+y}$
ついて次の問題を解きなさい.
(a)勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ.
(b)原点(0,0)が極小解か否か，最適性条件を用いて判定せよ.

$$e^{x+y}$$

（解答例）

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix} 2x-y-2+e^{x+y} \\ -x+4y+e^{x+y} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{H}f(x,y)=\begin{bmatrix} 2+e^{x+y} & -1+e^{x+y} \\ -1+e^{x+y} & 4+e^{x+y} \end{bmatrix}$$

$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ なので (0,0) は停留点ではない.
したがって極小解ではない.

レポート問題

(c)関数 $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x$ に対し，すべての停留点を求めよ．さらに，極小点，極大点，鞍点のいずれであるか，2次の最適性条件を用いて判定せよ．
（解答例）

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x - y - 2 \\ -x + 4y \end{bmatrix}$$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$ を解くと $(x,y) = (8/7, 2/7)$．停留点はこの1点だけとなる．

$\mathrm{H}f(8/7, 2/7) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ は正定値行列である．

したがって (8/7, 2/7) は（孤立）極小解である．

レポート問題

（2）関数 $f(x) = x^3 + 6x^2$ に対して

（a）初期点を $x = 2$ としてニュートン法を適用せよ。

（b）初期点を $x = 1$ としてニュートン法を適用せよ。

それぞれ、反復は2回行うこと。

（解答）途中の計算は省略.

(a) 2番目の点は1/2, 3番目の点は 1/20

(b) 2番目の点は1/6, 3番目の点は 1/156

レポート問題

（３）関数　$f(x) = |x|$ は凸関数である．これを証明せよ．
また，この関数は狭義凸ではない．理由を説明せよ．
（解答例）絶対値の性質として，任意の実数 a, b に対して

$$|a| + |b| \leqq |a + b|$$

が成り立つ．したがって，任意の実数 x, y および $0 \leqq t \leqq 1$ なる t に対して，

$$(1-t)\, f(x) + t\, f(y) = |(1-t)x| + |ty| \leqq |(1-t)x + ty| = f((1-t)x + ty)$$

が成り立つ．したがって，定義により f は凸関数である．

　また，x と y が共に非負のとき，

$$(1-t)\, f(x) + t\, f(y) = (1-t)x + ty = f((1-t)x + ty)$$

が成り立つ．したがって，定義により f は狭義凸関数ではない．