レポート問題

問題１：下記の4つの関数のヘッセ行列を計算しなさい

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$$

(ただし，$\boldsymbol{x}$はn次元ベクトル，$\boldsymbol{V}$は$n \times n$対称行列)

答えは教科書の問題3．1を参照のこと

レポート問題

問題２:関数 f_2, f_3 に対し，x＝(１，２)における
テイラー展開を求めなさい．

$$f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,\ \nabla f_2(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},\ \mathrm{H} f_2(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_2(1+d_1, 2+d_2) = 3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$
$$= 4 + 2d_1 + 4d_2 + d_1^2 + d_2^2$$

$$f_3(x_1,x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1,$$

$$\nabla f_3(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \log x_2 - \frac{x_2}{x_1} \\ -\log x_1 + \frac{x_1}{x_2} \end{bmatrix},\ \mathrm{H} f_3(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$f_3(1+d_1, 2+d_2) = \log 2 + \begin{bmatrix} \log 2 - 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

レポート問題

問題3：対称な2×2行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

Aは半正定値 ⇔ $a_{11} \geqq 0$, $a_{22} \geqq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 \geqq 0$

[$\Longrightarrow$ の証明] A が半正定値のとき，定義より任意のベクトル $x = (x_1, x_2)$ に対して $x^T Ax \geq 0$ が成り立つ．
とくに，$x = (1, 0)$ のとき $x^T Ax = a_{11} \geq 0$，$x = (0, 1)$ のとき $x^T Ax = a_{22} \geq 0$ が成り立つ．
また，$x = (-a_{12}, a_{11})$ のとき $x^T Ax = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$ なので，$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$.

[$\Longleftarrow$ の証明] $x = (x_1, x_2)$ を任意のベクトルとする．
$a_{11} > 0$ のとき，任意のベクトル $x = (x_1, x_2)$ に対して
$x^T Ax = a_{11}(x_1 + \frac{b}{a}x_2)^2 + \frac{x_2^2}{a_{11}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$.
$a_{11} > 0$ のとき，同様にして $x^T Ax \geq 0$.
$a_{11} = a_{22} = 0$ のとき，仮定より $a_{12} = 0$ となり，
$x^T Ax = 0$.
よって，定義より A は半正定値.

証明の際はむやみに「明らか」を使わない

a_{11}=0となる可能性があるので，0での割り算をしないように気をつけること