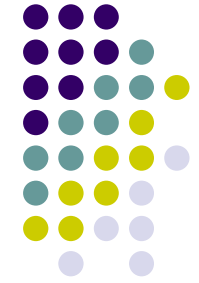


レポート問題



問題 1: 下記の4つの関数のヘッセ行列を計算しなさい

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$$

(ただし, \mathbf{x} は n 次元ベクトル, V は $n \times n$ 対称行列)

答えは教科書の問題3. 1を参照のこと

レポート問題



問題 2:関数 f_2, f_3 に対し, $x = (1, 2)$ におけるテイラー展開を求めなさい.

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad \nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad Hf_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

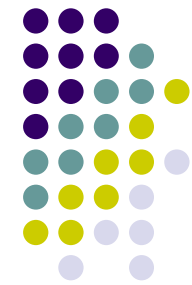
$$\begin{aligned} f_2(1 + d_1, 2 + d_2) &= 3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ &= 4 + 2d_1 + 4d_2 + d_1^2 + d_2^2 \end{aligned}$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1,$$

$$\nabla f_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \log x_2 - \frac{x_2}{x_1} \\ -\log x_1 + \frac{x_1}{x_2} \end{bmatrix}, \quad Hf_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$f_3(1 + d_1, 2 + d_2) = \log 2 + \begin{bmatrix} \log 2 - 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

レポート問題



問題3：対称な 2×2 行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

$$A \text{ は半正定値} \Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

[\Rightarrow の証明] A が半正定値のとき、定義より任意のベクトル $x = (x_1, x_2)$ に対して $x^T Ax \geq 0$ が成り立つ。

とくに、 $x = (1, 0)$ のとき $x^T Ax = a_{11} \geq 0$ 、 $x = (0, 1)$ のとき $x^T Ax = a_{22} \geq 0$ が成り立つ。

また、 $x = (-a_{12}, a_{11})$ のとき $x^T Ax = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$ なので、 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ 。

[\Leftarrow の証明] $x = (x_1, x_2)$ を任意のベクトルとする。

$a_{11} > 0$ のとき、任意のベクトル $x = (x_1, x_2)$ に対して

$$x^T Ax = a_{11}\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{x_2^2}{a_{11}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0.$$

$a_{11} > 0$ のとき、同様にして $x^T Ax \geq 0$ 。

$a_{11} = a_{22} = 0$ のとき、仮定より $a_{12} = 0$ となり、 $x^T Ax = 0$ 。

よって、定義より A は半正定値。

証明の際は
むやみに
「明らか」を
使わない

$a_{11}=0$ となる可
能性があるの
で、0での割り
算をしないよう
に気をつけるこ
と