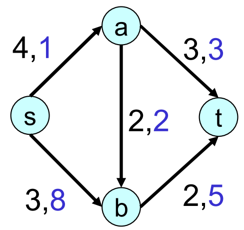
数理計画法　第9回
非線形計画

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

レポート問題の解答例

問題2 需要供給量4



最小化 $x_{sa} + 8x_{sb} + 2x_{ab} + 3x_{at} + 5x_{bt}$

条件 $x_{sa} + x_{sb} = 4$

$x_{at} + x_{ab} - x_{sa} = 0$

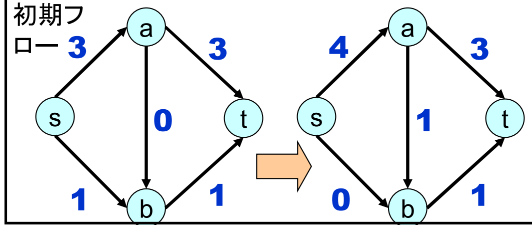
$x_{bt} - x_{sb} - x_{ab} = 0$

$-x_{at} - x_{bt} = -4$

$0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 3,\ 0 \le x_{ab} \le 2$

$0 \le x_{at} \le 3,\ 0 \le x_{bt} \le 2$

初期フロー



非線形計画問題とは？

目的関数や制約式が必ずしも線形でない数理計画問題

例：長方形の外周最小化問題

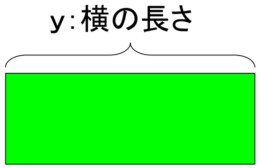
最小化　2x + 2y

条件　x y ≧ 1

x, y ≧ 0

非線形の不等式

x：縦の長さ



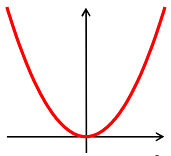
→ 非線形計画問題

注意:線形計画問題は非線形計画問題の特殊ケース

非線形関数の例（その１） [p.87]

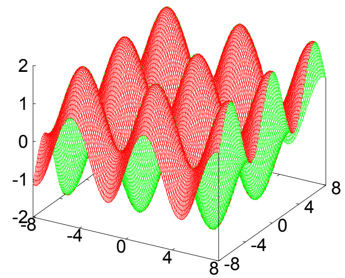
非線形関数 ― 線形でない関数

微分可能な非線形関数の例

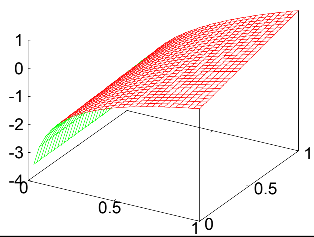


$f_1(x) = x^2$

$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$



$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$

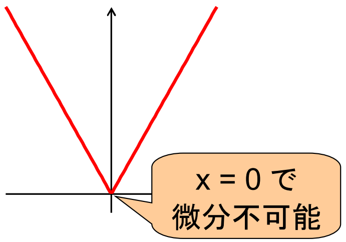


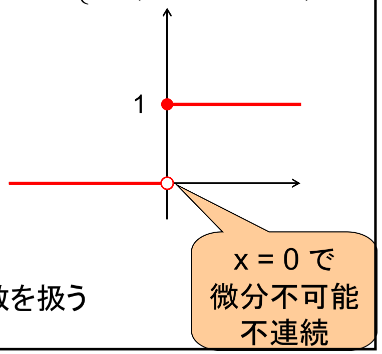
非線形関数の例(その2) [p.88]

微分不可能な非線形関数の例

$$f_4(x) = |x|$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0 のとき) \\ 0 & (x < 0 のとき) \end{cases}$$





この授業:
主に何回でも微分可能な関数を扱う

非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]

制約なし最適化問題

入力: 目的関数 f(x)
問題: 最小化　f(x)　　条件　なし

制約つき最適化問題

入力: 目的関数 f(x), 制約を表す関数 $g_i(x)$ (i = 1, 2, …, m)
問題: 最小化　f(x)　　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

この講義では、制約なし問題を主に扱う

非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]

制約つき問題と制約なし問題の関係

- 制約つき問題は制約なし問題に変形できる

最小化　f(x)　　条件　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

⇒ 最小化　f(x) + h(x)　　条件　なし

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1,2,\ldots,m) \\ M & (その他) \end{cases}$$

Mは十分に大きい正数

(注意)この制約なし問題を直接解くことは実用上難しい

- 制約なし問題を繰り返し解くことにより、制約つき問題を解くことが出来る

　→p.146 ペナルティ関数法、バリア関数法

勾配ベクトル [p.89]

関数 f の勾配ベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

一変数関数の場合は $\nabla f(x) = f'(x)$

例:

$f_1(x) = x^2$ ⇒ $\nabla f_1(x) = 2x$

$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$

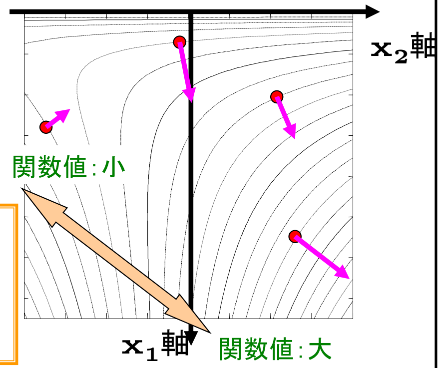
⇒ $\nabla f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix}$

勾配ベクトル（続き）[p.89]

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$

$$\nabla f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1/x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

関数f_3の等高線と
勾配ベクトルの方向



勾配ベクトルのイメージ：
■関数という山を登るときに最も急な方向
■関数値が増加する方向

勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

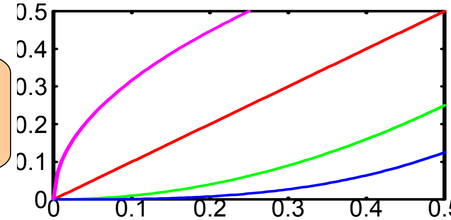
関数 f は勾配ベクトルを傾きとする線形関数により近似できる

（一次の）テイラー展開

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

記号 o(α)：α→0のときにg(α)/α→0となる関数g(α)を表す．

α², α³など，αより速く0に近づく関数を表す

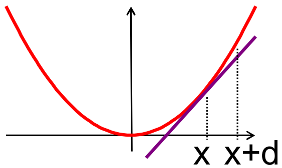


勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

例：$f_1(x) = x^2$　　$\nabla f_1(x) = 2x$

$$f_1(x+d) = (x+d)^2 = x^2 + (2x)d + d^2$$
$$= x^2 + (2x)d + o(|d|)$$



関数 f を点 x において線形関数で近似

$(x+d)^2$ と $x^2 + 2xd$ の誤差 ― |d|が小さければ十分小さい

勾配ベクトルの性質 [p.89]

勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

性質：任意の x に対し、∇f ≠0 ならば
十分小さい δ>0に対して　$f(\boldsymbol{x} - \delta \nabla f(\boldsymbol{x})) < f(\boldsymbol{x})$

証明：$\delta = \varepsilon / \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|, \boldsymbol{d} = -\delta \nabla f(\boldsymbol{x})$ とおく（ε：正の数）

テイラー展開より $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$
$= f(\boldsymbol{x}) - \varepsilon \|\nabla f(\boldsymbol{x})\| + o(\varepsilon)$

正数 ε を十分小さくする ⇒ $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ は0に近い値

$$-\varepsilon \|\nabla f(\boldsymbol{x})\| + o(\varepsilon) = \varepsilon \left(-\|\nabla f(\boldsymbol{x})\| + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) < 0$$

$\therefore\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x})$

勾配ベクトルの性質 [p.89]

勾配ベクトルの方向に進むと関数値が増える

性質：任意の x に対し、∇f ≠0 ならば
十分小さい δ >0に対して　$f(\boldsymbol{x}+\delta\nabla f(\boldsymbol{x})) > f(\boldsymbol{x})$

証明は省略（直前の性質と同様に証明できる）

最適性条件 [p.97]

制約なし最適化問題：　最小化　f(x)

最適性条件：ベクトル x が非線形計画問題の
最適解であるための必要条件

x は停留点　⇔　∇f(x)＝0

定理（制約なし最適化問題の最適性条件）：
x*: 制約なし問題の最適解　⇒　x*は停留点

証明：　∇f(x*)≠0 と仮定
勾配ベクトルの性質より、十分小さい δ >0に対して

$$f(\boldsymbol{x}^* - \delta\nabla f(\boldsymbol{x}^*)) < f(\boldsymbol{x}^*)$$

x* が最適解であることに矛盾　　∴∇f(x*)＝0

最適性条件 [p.97]

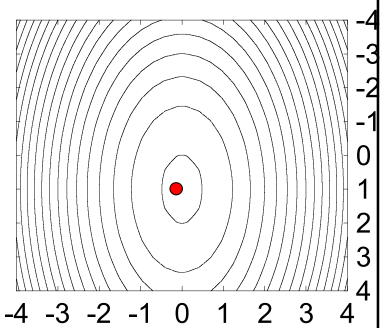
定理（制約なし最適化問題の最適性条件）：
x*: 制約なし問題の最適解　⇒　∇f(x*) = 0

例：$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1 + 4x_2^2$
$= (x_1-1)^2 + 4x_2^2 - 1$

(x_1,x_2) = (1,0) が最適解

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



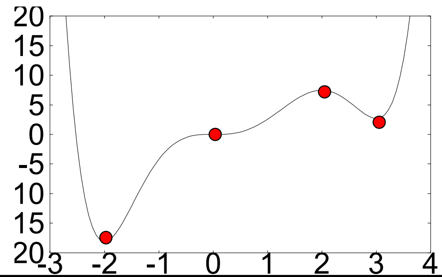
最適性条件 [p.97]

※「x*は停留点 ⇒ x*は最適解」は必ずしも
成り立たない

例：$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - x^4 + 4x^3$

$$\nabla f(x) = (x+2)x^2(x-2)(x-3)$$

停留点はx = -2, 0, 2, 3
最適解はx = -2 のみ



極小解、極大解、鞍点 [p.99]

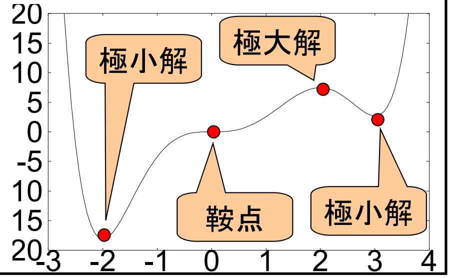
停留点 x^* の分類

極小解: x^* の付近だけに注目したとき、x^* は最小

> ある $\delta>0$ が存在して、$\|x - x^*\| \leqq \delta$ を満たす
> すべての x に対して $f(x) \geqq f(x^*)$

極大解: x^* の付近だけに注目したとき、x^* は最大

鞍点: 極小点でも
極大点でもない停留点



制約なし問題の解法1: 最急降下法 [p.102]

> 最急降下法のアイディア:
> 勾配ベクトルと逆の方向に進むと関数値が減る

現在の点 x を $x - \alpha \nabla f(x)$ により更新

ステップサイズ $\Rightarrow$ 関数値 $f(x)$ を減らしていく

ステップサイズの選び方:

次の一変数最適化問題を(近似的に)解く

最小化 $f(x - \alpha \nabla f(x))$ 条件 $\alpha > 0$

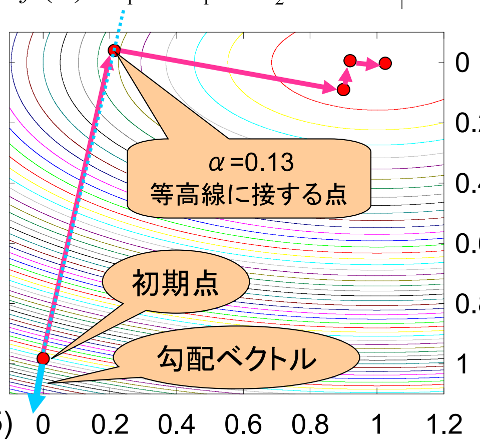
直線探索と呼ばれる

最急降下法の実行例 [p.103]

教科書の例3.2,3.8: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1 + 4x_2^2$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$$

- $(x_1,x_2) = (0,1)$ から スタート
- $\nabla f(0,1) = (-2,8)$
- $f(0 + 2\alpha, 1 - 8\alpha)$ を最小にするのは $\alpha = 0.13$
- 次の点は $(x_1,x_2) = (0.26, -0.05)$



最急降下法のアルゴリズム [p.102]

入力: 関数 f とその勾配ベクトル ∇f
初期点 x^0

ステップ0: $k=0$ とする

ステップ1: x^k が最適解に十分近ければ終了

ステップ2: 最急降下方向 $-\nabla f(x^k)$ を計算

ステップ3: 直線探索問題

最小化 $f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$ 条件 $\alpha > 0$

を解き、解を α^k とする

ステップ4: $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$ とおく

ステップ5: $k=k+1$ として、ステップ1に戻る

最適解の判定 [p.104,105]

•非線形計画問題では

最適解を正確に求めることは困難

⇒ 最適解に十分近い解（近似最適解）を求める

例: $f(x) = x^4 – 4x^2$
この関数を最小にする x は 0, $\pm\sqrt{2}$
無理数をコンピュータで表現することは不可能

•最適解に十分近いことをどうやって判定する？

（方法1）最適解 x^* に対し $\|\nabla f(x)\| = 0$ が成り立つ

⇒ $\|\nabla f(x)\|$ の値が十分小さくなったら終了

（方法2）最適解の近くでは x^k があまり変化しない

⇒ $\|x^{k+1} - x^k\|$ の値が十分小さくなったら終了

最適解の判定（つづき）[p.104,105]

•非線形計画問題では

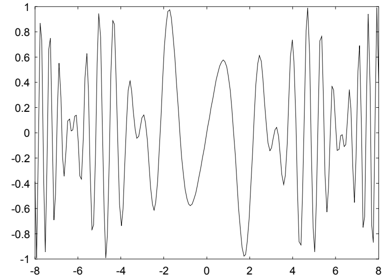
近似最適解すら求めることが困難なことが多い

⇓

極小解または停留点を
求めることで我慢する

•極小解は良い解であること
が多い

•ある種の非線形関数では
極小解⇔最小解



定理：ある仮定の下では、
最急降下法の求める点列は停留点に収束する

演習問題

問題１:下記の4つの関数の勾配ベクトルを計算しなさい

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$$

$$f_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T V \boldsymbol{x} \quad (\text{ただし，}\boldsymbol{x}\text{は}n\text{次元ベクトル，}\boldsymbol{V}\text{は}n\times n\text{対称行列})$$

問題2:次の2つの非線形計画問題

「最大化　$f_1(x_1, x_2)$　条件　$f_2(x_1, x_2) \leqq 5$」

「最小化　$f_2(x_1, x_2)$　条件　$f_1(x_1, x_2)=3$」

を（手計算で）解きなさい．また，問題および最適解を図で表しなさい．

問題3：関数 $f(x,y) = (x – 2)^4 + (x – 2y)^2$ に対して、初期点を(0, 3) として最急降下法を適用せよ。資料に添付してある等高線の図を使って実行すること.（数値はおおまかに計算すればよい）

ポイント：点の動きを表す折れ線の角度は必ず90度