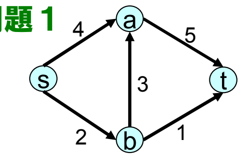
数理計画法　第8回

ネットワーク計画
3. 最小費用フロー問題

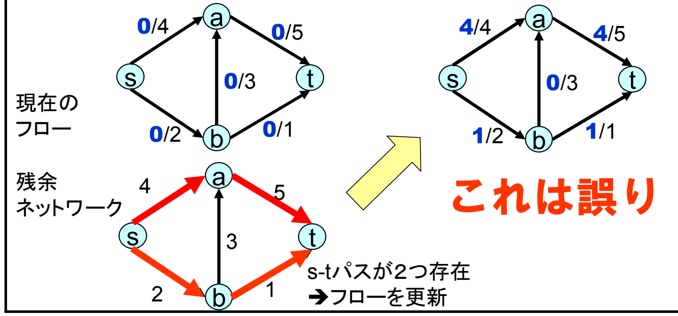
担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

前回のレポートの解答について

問題 1

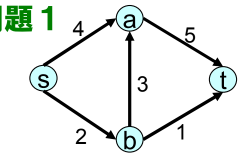


パス増加法：
各反復において，残余ネットワークの**一つの**s-tパスを使ってフローを増加させる

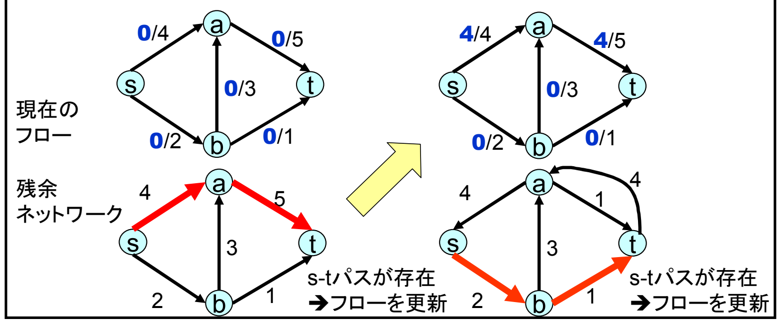


前回のレポートの解答について

問題 1



パス増加法：
各反復において，残余ネットワークの**一つの**s-tパスを使ってフローを増加させる



3. 最小費用フロー問題

最小費用フロー問題の定義

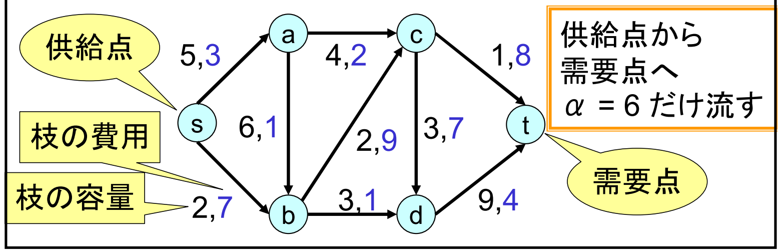
入力：有向グラフ G = (V, E)

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

需要(供給)量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



応用例：研究室配属問題(その1)

•各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの4人を研究室X,Yへ

•各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

•学生の満足度の合計を最大にしたい

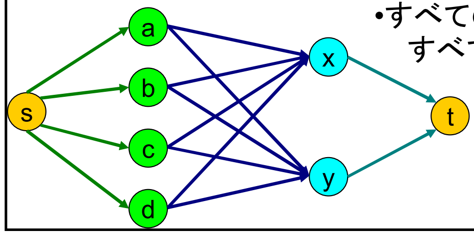
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題(その2)

最小費用フロー問題に変形

•各学生に対応する頂点 a, b, c, d
•各研究室に対応する頂点 x, y
•供給点 s, 需要点 t

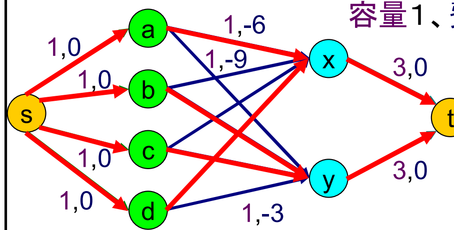
•供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
•研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)



•すべての学生頂点から
すべての研究室頂点への枝
(a, x), (a, y), (b, x), …

応用例：研究室配属問題(その3)

•供給点から学生頂点への枝—容量1、費用0
•研究室頂点から需要点への枝
—容量＝研究室の定員、費用0
•学生頂点から研究室頂点への枝
容量1、費用＝(－1)×満足度



•需要(供給)量＝学生数

学生A,D→X研究室
学生B,C→Y研究室

この問題の(整数値)フロー⇔定員を満たす配属方法
フローの費用⇔(－1)×学生の満足度の合計
∴最小費用フロー問題に変形できた

最小費用フロー問題の定式化

最小化　$\Sigma\{ c_{ij}\, x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$

各枝の費用×フロー量　の和

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　$((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$

$(k \in V - \{s, t\})$

各頂点での流量保存条件

需要供給量に関する条件

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = \alpha$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\}$ − $\Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -\alpha$

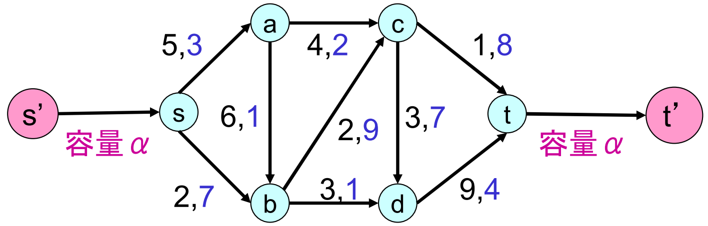
需要供給を満たすフローの求め方

(1) 人工問題として最大フロー問題を作る

(2) 人工問題の最大フローにおいて

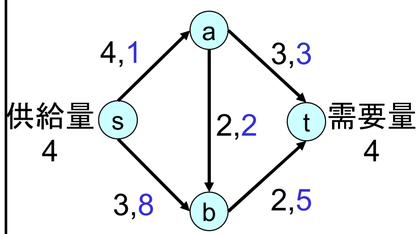
$f = \alpha$　⇒　現在のフローは需要供給を満たす

$f < \alpha$　⇒　需要供給を満たすフローは存在しない



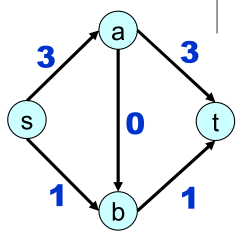
各枝の費用は無視

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

――― 残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方（その1）

最大フローのときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

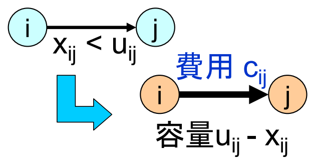
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij}\}$

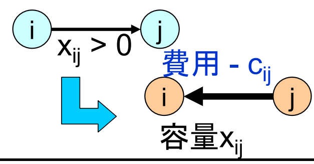
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



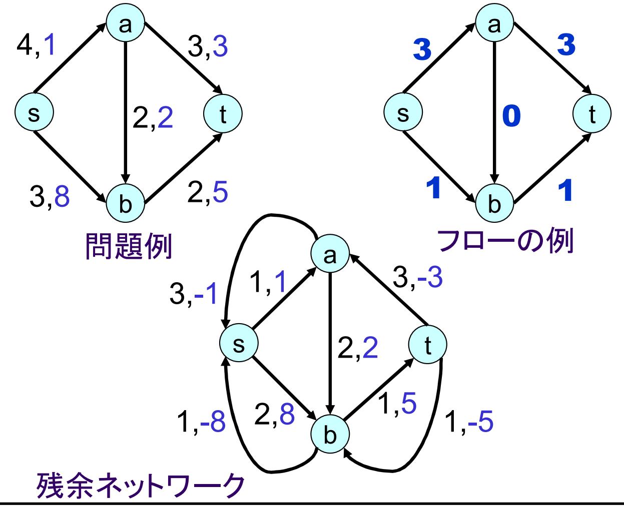
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0\}$

容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $- c_{ij}$

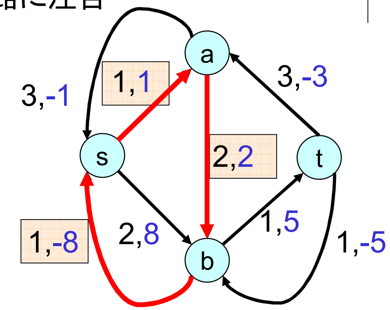


残余ネットワークの作り方(その2)



残余ネットワークの性質(その1)

残余ネットワークの閉路に注目

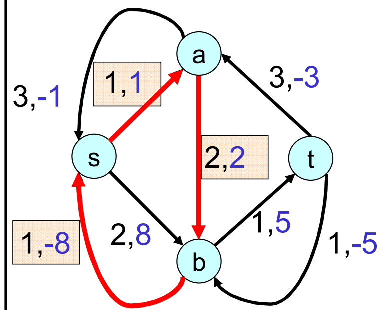


閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の容量の最小値=1
閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の費用の和=-5

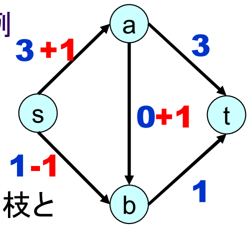
残余ネットワークの性質(その2)

残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

残余ネットワーク



フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋ α
逆の向き⇒フロー値に－ α
無関係⇒フロー値は不変

閉路の容量 α=1
閉路の費用 γ=-5

この更新により、フローの
費用は $\alpha\gamma$ (＝－5)増加

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

性質：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ(証明は後で)

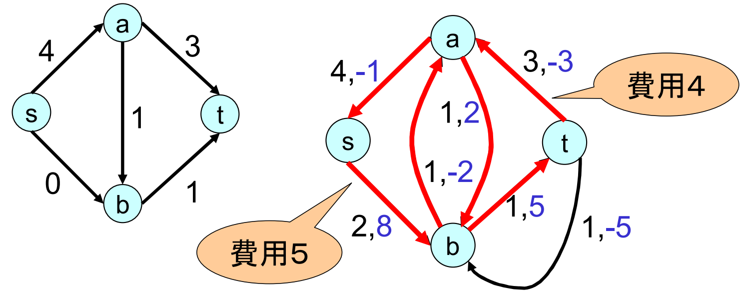
性質：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

2つの性質をまとめると

定理：現在のフローは費用最小
⇔ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

残余ネットワークの性質（その4）

修正後のフロー　　　残余ネットワーク



費用が負の閉路がない
⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去法

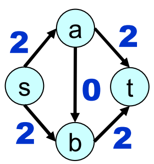
最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

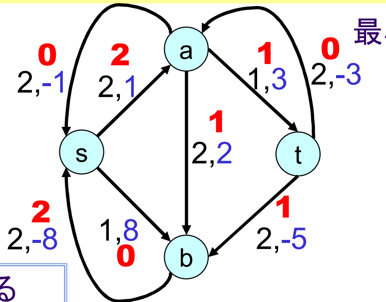
ステップ0：人工問題を解いて、需要供給量を満たす フローを求める
ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る
ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が 存在しない⇒ 現在のフローは費用最小（終了）
ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、 それを用いて現在のフローを更新する
ステップ4：ステップ1へ戻る

性質の証明（その1）

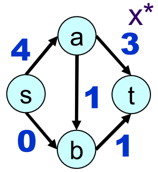
性質：現在のフローは費用最小でない
⇒　残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

現在のフロー x





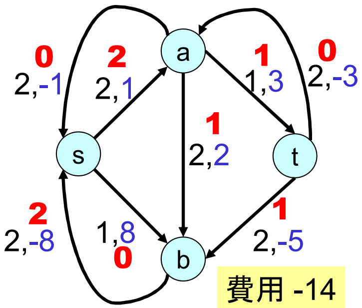
最小費用フロー x^*



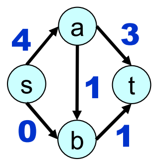
フロー x に関する
残余ネットワーク上で
x^* と x の差を表現

$x_{ij}^* - x_{ij} \geqq 0$ ⇒ 枝 (i, j) に $x_{ij}^*-x_{ij}$
$x_{ij}^* - x_{ij} < 0$ ⇒ 枝 (j, i) に $x_{ij} - x_{ij}^*$
その他の枝に0

性質の証明（その2）

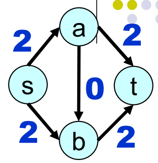


費用 -14



最小費用
フロー x^*

費用 20



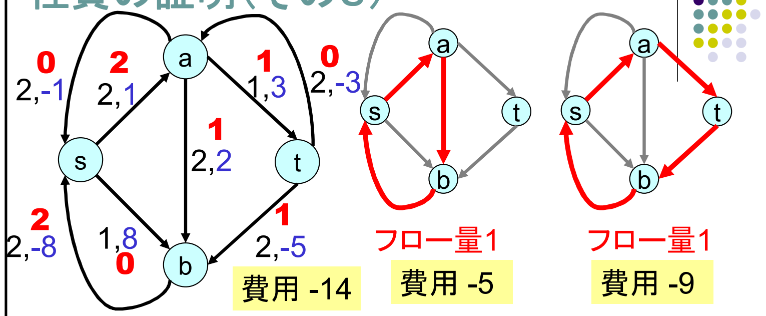
現在のフロー x

費用 34

x^* と x の差：
x に関する残余ネットワーク上で
容量条件と流量保存則を満たす
⇒　残余ネットワーク上の
「フロー」

差を表す「フロー」の費用
＝（x^* の費用）
ー（x の費用）
＜　0

性質の証明(その3)



x* と x の差を表す「フロー」:
x に関する残余ネットワーク上で
容量条件と流量保存則を満たす

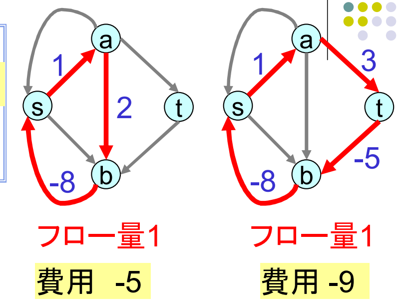
➡ 閉路上を流れる
フローに分解可能

差を表す「フロー」の費用
＝閉路上のフローの費用
の合計

性質の証明(その4)

閉路上のフローの
費用の合計　費用 -14
＝差を表す「フロー」の費用
＜ 0

閉路上を流れるフロー
の費用
＝(閉路の費用)
×(フロー量)



➡ いずれかの閉路の費用は負
➡ x の残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
(証明終わり)

負閉路消去法の計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定
U = 枝容量の最大値，
C = 枝費用の絶対値の最大値
m = 枝の数，n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU
  ➔ 反復回数 ≦ 2mCU 以下
- 各反復での計算時間
  ＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間
  ➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は O(m^2 n C U)
(入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間)

負閉路消去法の改良

負閉路消去法の反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

(改良法１) 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
反復回数 O(m log (n U))
ただし，費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
➔ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

(改良法２)
“(閉路の費用)／(閉路の枝数)”が最小の負閉路を選ぶ
反復回数 O(n m^2 log n)，一回の反復 O(n m)
※この他にも，負閉路消去法の計算時間を短縮する
ための様々なテクニックが存在する

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

これまで扱ってきた最小費用流問題：

各枝の費用は線形関数 $f_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}\ x_{ij}$

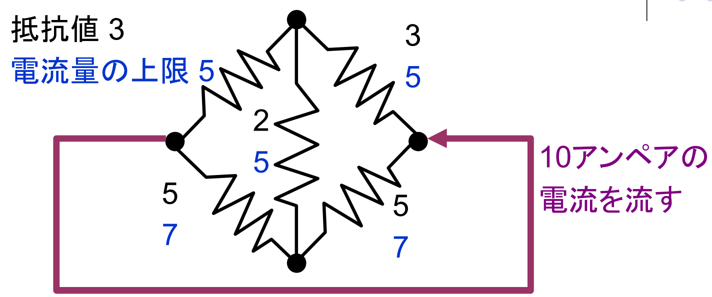
⇒ 非線形関数 $f_{ij}(x_{ij})$ の場合に拡張

電気回路の例：

抵抗値 R の抵抗に電流が x アンペア流れると消費されるエネルギー量は

$f(x) = (1/2)\ R\ x^2$（2次の非線形関数）

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

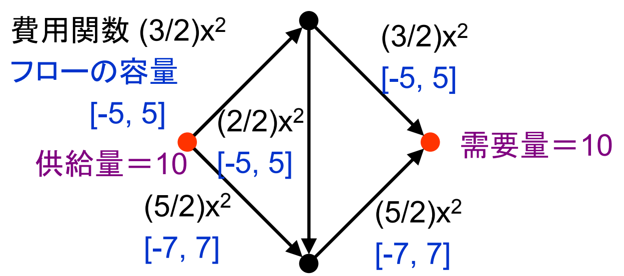


各抵抗に流れる電流量はどのように決まるか？

⇒回路全体で消費される総エネルギー量を最小にする

⇒ 最小費用流問題へ

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題



対応する非線形最小費用流問題（費用が2次関数）

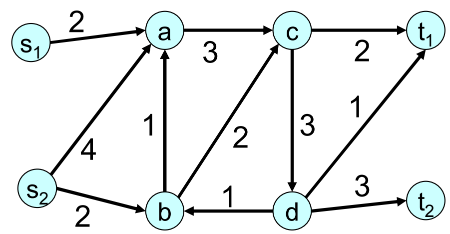
―負閉路消去法の拡張版を使って解くことが可能

レポート問題

問題１： 複数の供給点および複数の需要点をもつ最大フロー問題は，一つの供給点および一つの需要点をもつ最大フロー問題に変換できる．そのやり方について，以下の例を使って説明せよ．

s_1, s_2 は供給点

t_1, t_2 は需要点



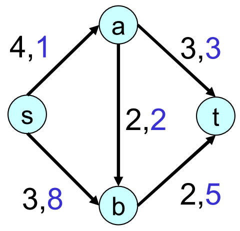
レポート問題

問2： 次の最小費用フロー問題に対して、

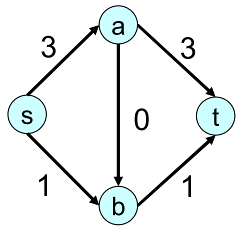
（1）定式化せよ

（2）与えられた初期フローに対して負閉路消去法を適用し，最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(a)　需要供給量4



初期フロー



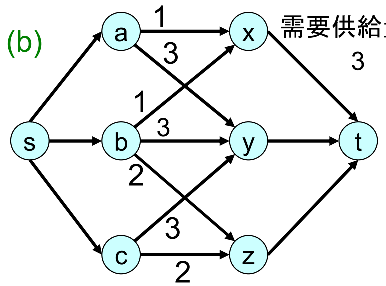
レポート問題

問3： 次の最小費用フロー問題に対して、

（1）定式化せよ

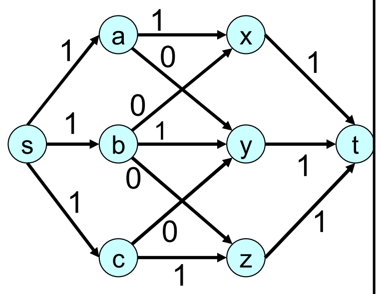
（2）負閉路消去法を用いて最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）

(b)



需要供給量 3

初期フロー



各枝の容量は1
s から出る枝と t に入る枝の費用は0
それ以外は各枝の数値を参照