

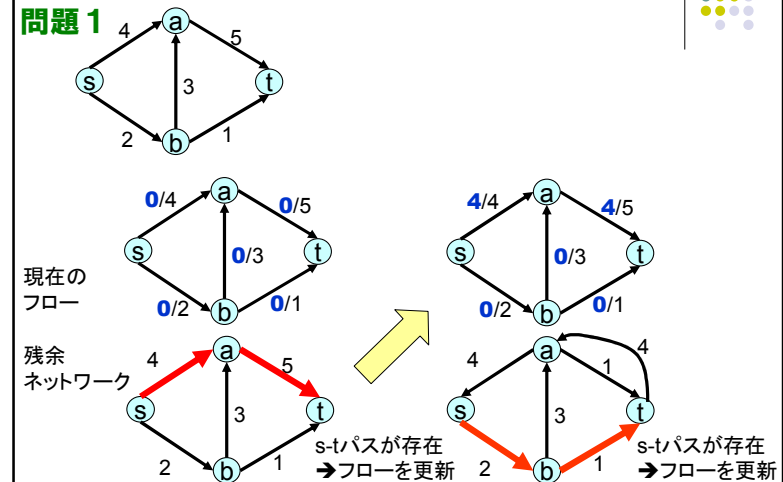
数理計画法 第7回

ネットワーク計画 2. 最大フロー問題

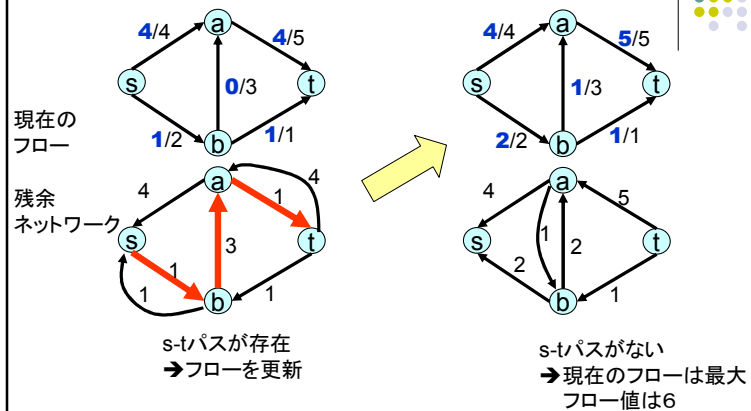
担当: 塩浦昭義
(情報科学研究科 准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

レポート問題の解答例

問題 1



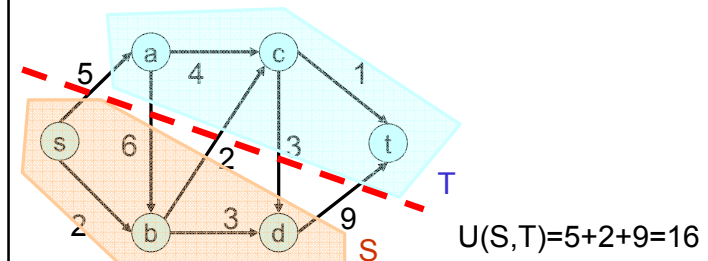
レポート問題の解答例



復習:s-t カット

s-t カット (S, T) : $s \in S, t \in T$,
 S, T は頂点集合 V の分割 ($S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$)

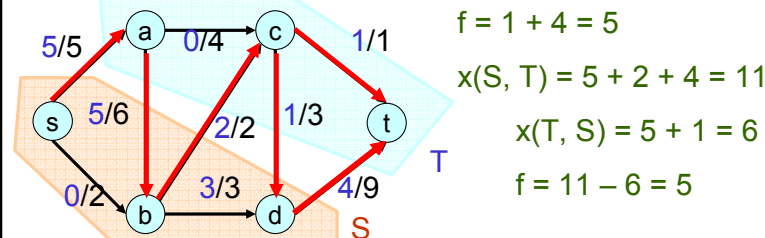
s-t カット (S, T) の容量 $U(S, T)$:
S から T へ向かう枝の容量の和



復習:s-t カットの性質(その1)

性質1:

任意のs-tカット(S, T)と任意のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
 SからTへの枝のフロー量の和 $x(S,T)$
 — TからSへの枝のフロー量の和 $x(T,S)$
 = 需要点に流れ込むフロー量 f



s-t カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 $s, b, d \in S$ に関する流量保存条件を足し合わせる

$$\begin{aligned} (x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) &= 0 \\ x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) &= 0 \\ x_{sa} + x_{sb} &= f \end{aligned}$$

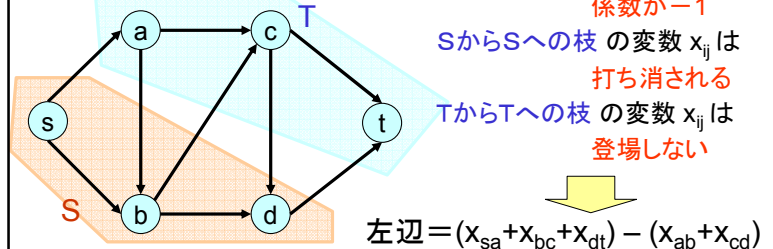
左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝の変数 x_{ij} は
係数が-1

SからSへの枝の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝の変数 x_{ij} は
登場しない



s-t カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$$\begin{aligned} \sum \{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る}\} \\ - \sum \{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る}\} &= 0 \quad (k \in S - \{s\}) \end{aligned}$$

$$\sum \{x_{sj} \mid (s,j) \text{ は } s \text{ から出る}\} - \sum \{x_{is} \mid (i,s) \text{ は } s \text{ に入る}\} = f$$

左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は係数が+1

TからSへの枝の変数 x_{ij} は係数が-1

SからSへの枝の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝の変数 x_{ij} は登場しない

$$\Rightarrow \text{左辺} = x(S, T) - x(T, S)$$

s-t カットの性質(その2)

性質2: 任意のs-tカット(S, T)とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
 フロー量 $f \leq$ カットの容量 $U(S,T)$

証明:

$$f = x(S, T) - x(T, S)$$

(性質1)

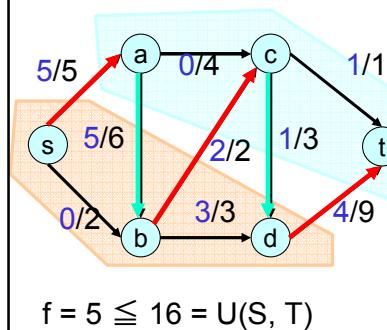
$$x(S, T) \leq U(S, T)$$

(容量条件)

$$x(T, S) \geq 0$$

(フローは非負)

$$\begin{aligned} \therefore f &\leq U(S, T) - 0 \\ &= U(S, T) \end{aligned}$$



最小カット問題

性質2: 任意の s - t カットとフローに対し
フロー量 $\leq$ カットの容量

LPの弱双対定理
に対応

→ カットの容量は最大フローのフロー値に
対する上界を与える

より良い上界を求めたい $\Rightarrow$ 最小カット問題

最小カット問題

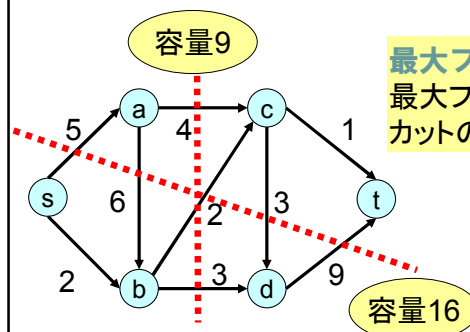
入力: グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$
出力: 容量最小の s - t カット (**最小カット**)

最小カット問題は最大フロー問題の双対問題

最小カット問題

最小カット問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$
出力: 容量最小の s - t カット (**最小カット**)



最大フロー-最小カット定理
最大フローのフロー値と最小
カットの容量は等しい

以降はこの定理の
証明を行う

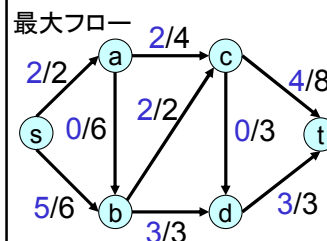
最大フロー-最小カット定理の証明(その1)

性質2: 任意の s - t カット (S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i, j) \in E)$ に対し
フロー量 $f \leq$ カットの容量 $U(S, T)$

最大フロー $(x_{ij} \mid (i, j) \in E)$ に対し,
ある s - t カット (S, T) が $f = U(S, T)$ を満たすならば,
それは **最小カット**

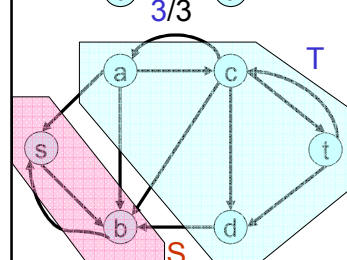
フロー増加法の終了時に,
このような s - t カットが実際に存在することを示す

最大フロー-最小カット定理の証明(その2)



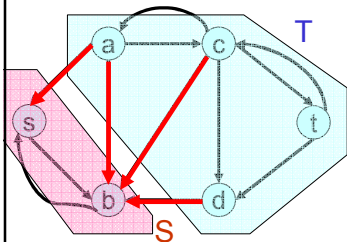
最大フローに対して
残余ネットワークを作る

残余ネットワークには
 s - t パスが存在しない



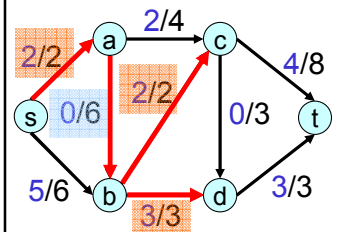
S = 残余ネットワークにおいて
 s から到達可能な頂点集合
 $T = V - S$
に対し、 (S, T) は s - t カット

最大フロー最小カット定理の証明(その3)



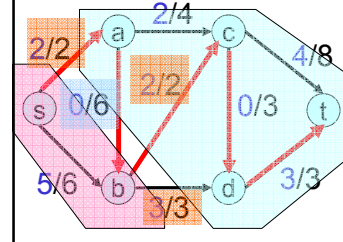
$S = s$ から到達可能な頂点集合
 $T = V - S$

残余ネットワークにおいて
 S から T に向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
 S から T に向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
 T から S に向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大フロー最小カット定理の証明(その4)



元のネットワークにおいて
 S から T に向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
 T から S に向かう枝では $x_{ij} = 0$

$$\begin{aligned} x(S, T) &= \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ向かう枝}\} \\ &= \sum \{u_{ij} \mid (i, j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ向かう枝}\} \\ x(T, S) &= \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \text{ は } T \text{ から } S \text{ へ向かう枝}\} = 0 \\ \therefore x(S, T) - x(T, S) &= U(S, T) \end{aligned}$$

$$\text{性質1より } f = x(S, T) - x(T, S)$$

$$\therefore f = U(S, T) \quad (\text{証明終わり})$$

最大フロー最小カット定理

定理： フロー増加法により求められたフローは**最大フロー**

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

$T = V - S$

とすると、 (S, T) は**最小 s - t カット**

さらに $f = U(S, T)$ が成り立つ

最大フロー最小カット定理：

最大フロー $(x_{ij} \mid (i, j) \in E)$ と**最小 s - t カット** (S, T) に対し

$$f = U(S, T)$$

応用：供給・需要を満たすフローを求める

入力： 有向グラフ $G = (V, E)$

各枝 $(i, j) \in E$ の**容量** $u_{ij} \geq 0$

各頂点 $i \in V$ の**供給・需要量** b_i (ただし b_i の和は0)

($b_i > 0 \rightarrow i$ は供給点, $b_i < 0 \rightarrow i$ は需要点)

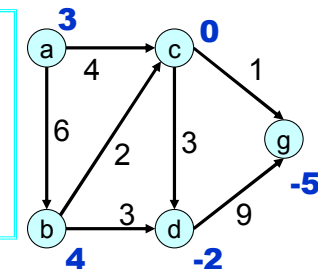
出力： 次の条件を満たすフロー

●各頂点 $i \in V$ での**供給・需要条件**

(i から流出するフロー量
 - (i に流入するフロー量) = b_i)

●各枝 (i, j) の**容量条件**

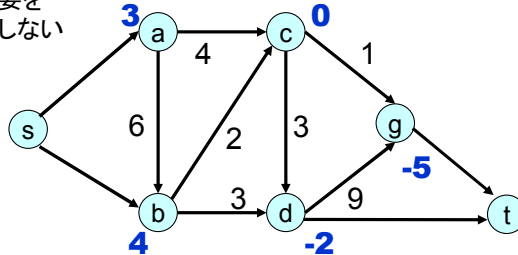
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$



応用: 供給・需要を満たすフローを求める

最大フロー問題に帰着する

- (1) 新たな頂点 s (供給点), t (需要点) を追加
- (2) $b_i > 0$ ならば枝 (s, i) を追加, 容量は b_i
- (3) $b_i < 0$ ならば枝 (i, t) を追加, 容量は $-b_i$
- (4) 最大フローを求める.
- (5) 各枝 (s, i) に対し $x_{si} = b_i \rightarrow$ 供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外 $\rightarrow$ 供給・需要を満たすフローは存在しない



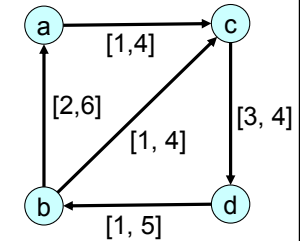
応用: 上下限制約を満たすフローを求める

入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

各枝 $(i, j) \in E$ フローの **上限値** u_{ij} , **下限値** l_{ij} ($0 \leq l_{ij} \leq u_{ij}$)

出力: 次の条件を満たすフロー

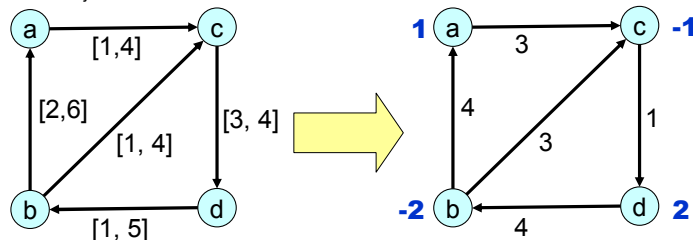
- 各頂点 $i \in V$ での **流量保存条件**
(i から流出するフロー量) $-$ (i に流入するフロー量) $= 0$
- 各枝 (i, j) の **上下限条件**
 $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$



応用: 上下限制約を満たすフローを求める

供給・需要を満たすフロー (下限値 0) を求める問題に帰着

- (1) 各頂点 $i \in V$ に対し,
 $b_i = (i \text{ に入る枝の下限値の和}) - (i \text{ から出る枝の下限値の和})$
- (2) 各枝 $(i, j) \in E$ に対し, 枝の容量を $u_{ij} - l_{ij}$ とおく
- (3) 得られたネットワークにて供給・需要を満たすフロー x_{ij} を求める
- (4) $x_{ij} + l_{ij}$ は元のネットワークの上下限制約を満たすフロー



応用: プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ 東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

エクスポスの優勝可能性

✗ 残り全勝しても80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィ リーズ	80	79	1勝 1		0勝 0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0勝 0		0勝 0
エクス ポス	77	82	1勝 1	2勝 2	0勝 0	

ブレーブスが全敗で
同じ勝ち数に

残り試合全勝で83勝

メッツが84勝

フィリーズの
優勝可能性



プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エクス ポス
ブレー ブス	83	71		1勝 1	6勝 6	1勝 1
フィ リーズ	80	79	1勝 1		0勝 0	2勝 2
メッツ	78	78	6勝 6	0勝 0		0勝 0
エクス ポス	77	82	1勝 1	2勝 2	0勝 0	

全ての試合で
下位チームが
上位チームに
勝った場合



優勝の可能性は
ゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

では、次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所
属のチーム
との試合

	勝	敗	残り試合数					
			ヤンキ ース	オリオ ールズ	レッドソ ックス	ブルー ージェイズ	タイガ ース	その他
ヤンキース	75	59		3勝 3	8勝 8	7勝 7	3勝 3	7勝 7
オリオールズ	71	63	3勝 3		2勝 2	7勝 7	4勝 4	15勝 15
レッドソックス	69	66	8勝 8	2勝 2		0勝 0	0勝 0	17勝 17
ブルージェイズ	63	72	7勝 7	7勝 7	0勝 0		0勝 0	13勝 13
タイガース	49	86	3勝 3	4勝 4	0勝 0	0勝 0		20勝 20

タイガースは残り試合全勝すると76勝
ヤンキースの勝ち数以上→優勝の可能性？

最大フロー問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

タイガースにとって都合の良いケースのみ考える

- タイガースは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗



東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

■どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる

→優勝の可能性なし 需要供給を満たすフローが存在しない

■あるケースにおいては、他チームは全て76勝以下

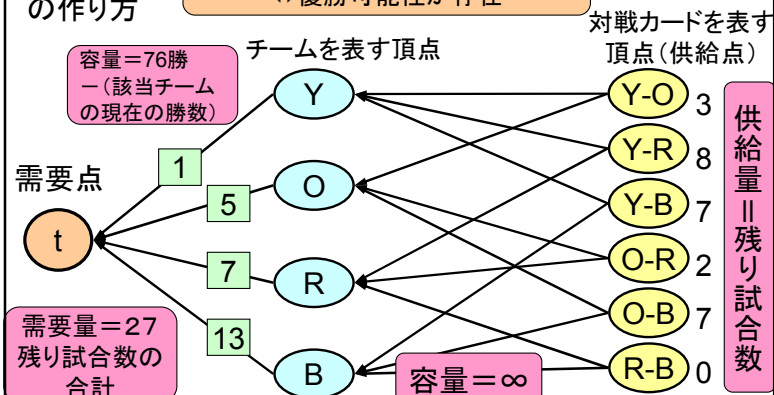
→優勝の可能性あり 需要供給を満たすフローが存在する

需要供給を満たすフローを求める問題に帰着

プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

ネットワーク
の作り方

需要供給を満たすフローが存在
⇔優勝可能性が存在

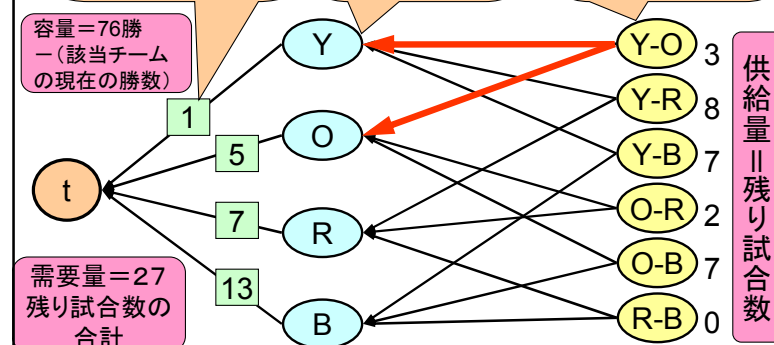


プロ野球リーグの優勝可能性判定 と最大フロー問題

Yの勝数はタイガースの最大勝ち数76を超えてはいけない

Yは各対戦カードから勝数を受け取る

YとOの対戦カードから
合計3の勝数を
YとOに供給



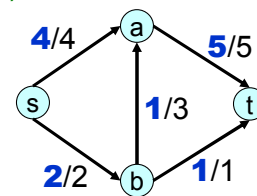
演習問題(レポート提出の必要なし)

問題：ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ

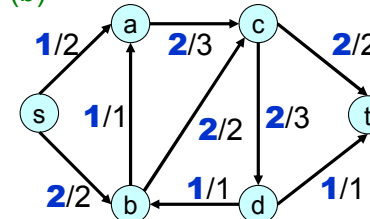
レポート問題

問1：下記の図は、最大フロー問題およびその最大フローを表す。これらのフローに対し、残余ネットワークを書きなさい。また、授業でやったやり方に従って最小 s-t カットを求めよ

(a)



(b)



レポート問題

問2：図1のようなネットワークとフロー x について考える.
このフローに対して, 図2のような残余ネットワーク上のフロー y を考えると, 図3のような新しいフロー x' が得られる.
このとき, 新しいフローが上下限制約および流量保存条件を満たすことを証明せよ. (ヒント: 残余ネットワーク上のフロー y に対する上下限制約および流量保存条件を使う)

図1: 与えられた問題と現在のフロー x

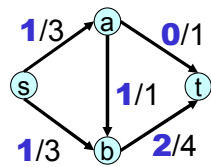


図2: 残余ネットワークとそのフロー y

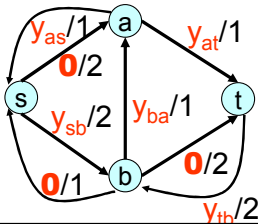
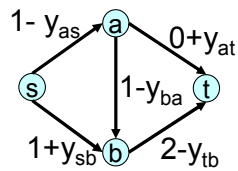


図3: 新しいフロー x'



レポート問題(その2)

問題3：スライド17枚目の最大フロー問題を解いて, 供給・需要を満たすフローを求めなさい.

問題4：スライド19枚目の最大フロー問題を解いて, 上下限制約を満たすフローを求めなさい.