数理計画法　第6回

ネットワーク計画

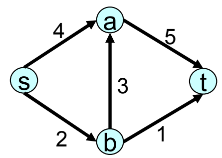
2. 最大フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習：最大フロー問題

目的：供給点 s から需要点 t にフローをたくさん流したい
条件1（容量条件）：
　0 ≦ 各枝を流れるフローの量 ≦ 枝の容量
条件2（流用保存条件）：
　頂点から流れ出すフローの量＝　流れ込むフローの量

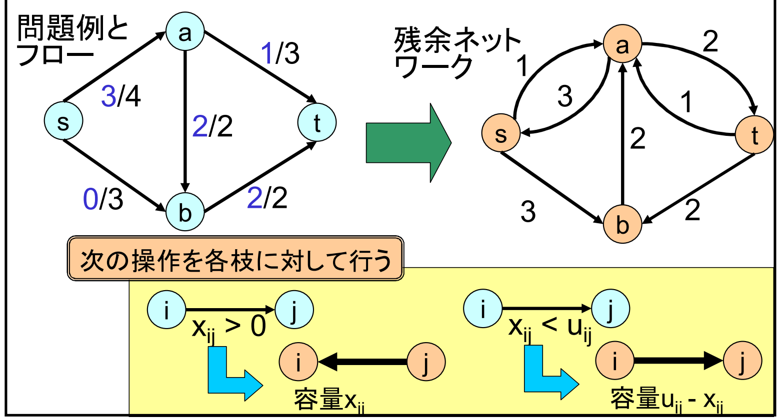
問題例と定式化



最大化　f
条件
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3,$$
$$0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1$$

復習：残余ネットワーク

残余ネットワーク：最大フローを求めるための「道具」



残余ネットワークに関する定理

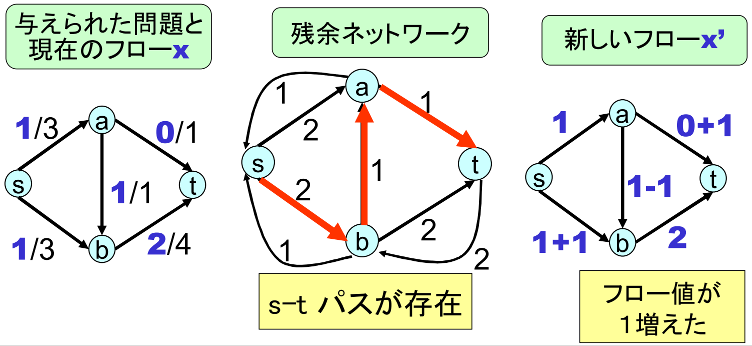
定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
　➔ 現在のフローは増加可能

定理２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
　➔ 現在のフローは最大フロー

以下，これらの定理を証明する

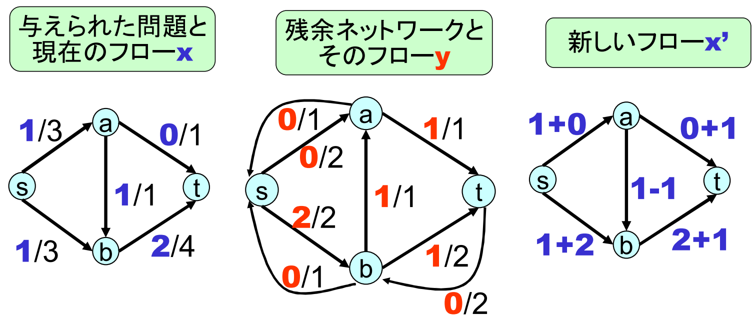
定理1の例

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
　➔ 現在のフローは増加可能

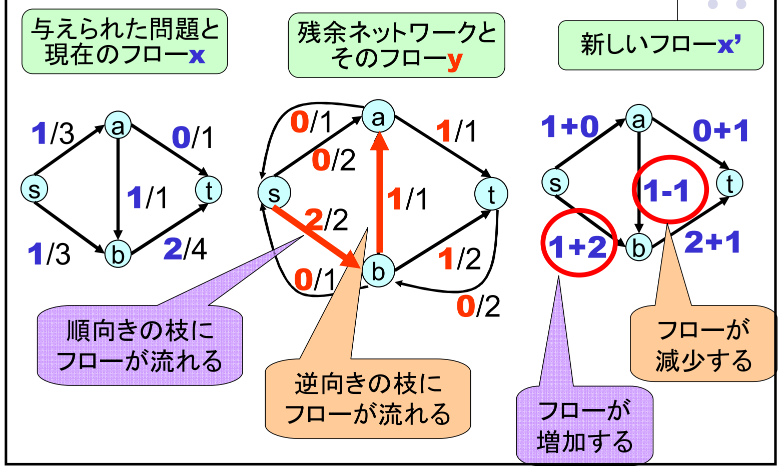


残余ネットワークの性質（定理1）

（現在のフロー **x**）＋（残余ネットワークのフロー **y**）
＝（新しいフロー **x'**）



残余ネットワークの性質（定理1）



残余ネットワークの性質（定理1）

（現在のフロー **x**）＋（残余ネットワークのフロー **y**）
＝（新しいフロー **x'**）

（**x**のフロー値）＋（**y**のフロー値）＝（**x'**のフロー値）

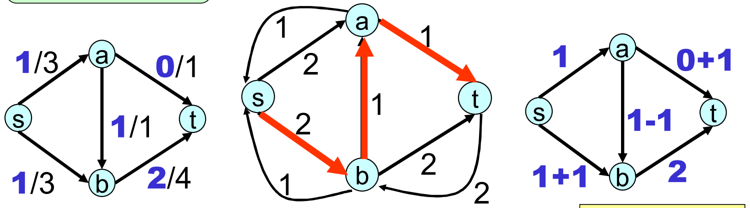
残余ネットワークにフロー値＞０のフローが存在するとき，
現在のフローは増加可能

どうやって見つけるか？

残余ネットワークの性質（定理1）

残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

与えられた問題と現在のフロー**x**　　残余ネットワーク　　新しいフロー**x'**



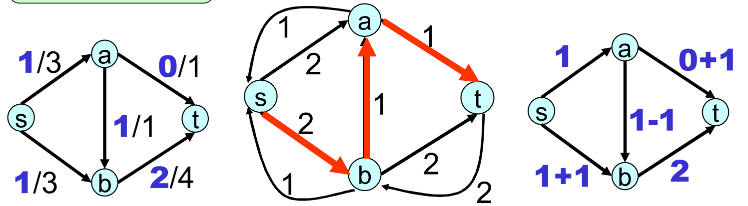
パスに沿ってフローが流せる
フロー量＝パス上の枝の最小容量

フロー値が
1増えた

残余ネットワークの性質（定理1）

残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

与えられた問題と現在のフロー**x**　　残余ネットワーク　　新しいフロー**x'**



定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

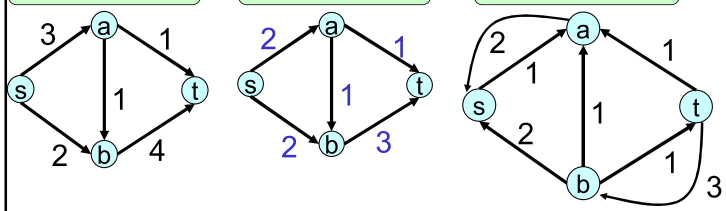
ステップ0：初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする
ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る
ステップ2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
⇒ 終了
ステップ3：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する
ステップ4：ステップ1へ戻る

このアルゴリズムにより本当に最大フローが得られるのか？

定理2の例

定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

与えられた問題　　現在のフロー　　残余ネットワーク

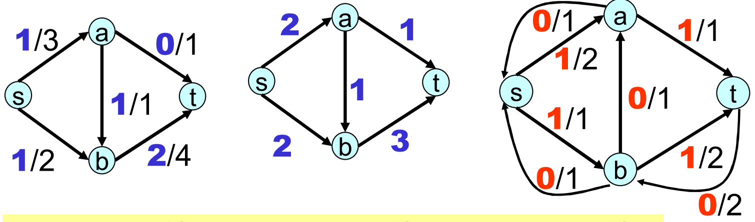


s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

残余ネットワークの性質（定理2）

性質：（別のフロー **x’**）－（現在のフロー **x**）
＝（残余ネットワークのフロー **y**）

与えられた問題と現在のフロー**x**　　別のフロー**x’**　　残余ネットワークとそのフロー**y**



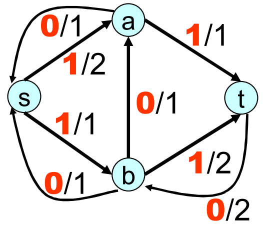
（**x’**のフロー値）－（**x**のフロー値）＝（**y**のフロー値）

x’：最大フロー，**x**：最大でないフロー　➔（**y**のフロー値）＞0

残余ネットワークの性質（定理2）

性質：フロー値＞0のsからtへのフローが存在
➔ネットワークにs-tパスが存在

残余ネットワークとそのフロー**y**
フロー値＞0



直感的なイメージ（証明ではない）：
sからtへのフローが存在
➔sからフローを辿っていくと，
tに辿り着くルートが存在
➔ネットワークに s-t パスが存在

残余ネットワークの性質（定理2）

性質：（別のフロー **x’**）－（現在のフロー **x**）
＝（残余ネットワークのフロー **y**）

ゆえに　**x’**：最大フロー，**x**：最大でないフロー
➔（**y**のフロー値）＞0

性質：フロー値＞0のsからtへのフローが存在
➔ネットワークにs-tパスが存在

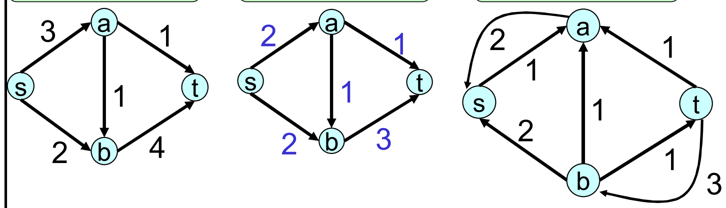
定理２：現在のフローは最大フローでない
➔ 残余ネットワークに s-t パスが存在する
（対偶）残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔現在のフローは最大フローである

残余ネットワークの性質（定理2）

定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

フロー増加法は必ず最大フローを求める！！

与えられた問題　　現在のフロー　　残余ネットワーク



s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

フロー増加法の計算時間

※各枝の容量は整数と仮定
　U = 容量の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

各反復においてフローが1以上増加
➔反復回数 ≦ 最大フロー量 ≦ m U

各反復での計算時間
＝ 残余ネットワークのs-t パスを求める時間
➔深さ優先探索，幅優先探索などを使うと O(m + n) 時間

∴ 計算時間は O((m+n) m U)
（入力サイズは m + n + log U なので，指数時間）

フロー増加法の改良

フロー増加法の反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での s-t パスの選び方を工夫する

（**改良法１**）各反復でのフロー増加量を大きくする
➔各反復で容量最大の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 O(m log (n U))，計算時間 O(m^2 log (n U))

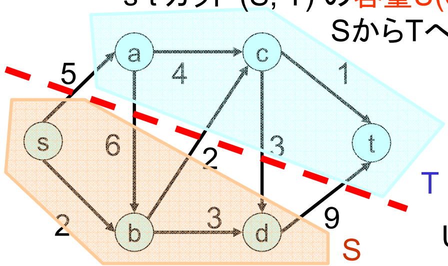
（**改良法2**）各反復で最短の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 O(m n)，計算時間 O(m^2n)

※この他にも，フロー増加法の計算時間を短縮する
ための様々なテクニックが存在する

s-t カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックは
どこになるか？

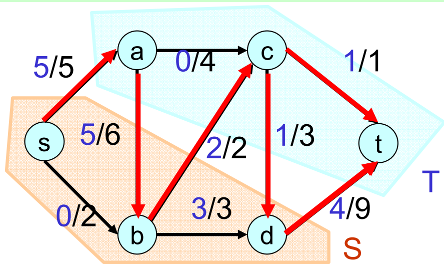
s-t カット (S, T): s ∈ S, t ∈ T,
S, T は頂点集合Vの分割（S∩T = ∅, S∪T = V）
s-t カット (S, T) の容量U(S,T):
SからTへ向かう枝の容量の和



U(S,T)=5+2+9=16

s-t カットの性質（その１）

性質１：
任意のs-tカット(S, T) と任意のフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
SからTへの枝のフロー量の和 x(S,T)
ー TからSへの枝のフロー量の和 x(T,S)
＝ 需要点に流れ込むフロー量 f



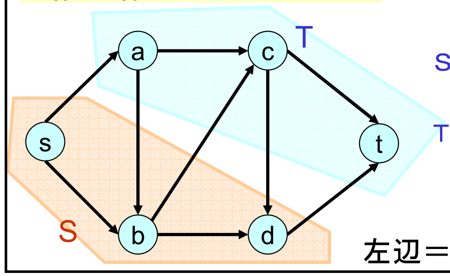
f = 1 + 4 = 5
x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11
x(T, S) = 5 + 1 = 6
f = 11 – 6 = 5

s-t カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は 係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は 係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は 打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は 登場しない

左辺$=(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

s-t カットの性質(その1)

一般の場合の証明:下記の制約式を足し合わせる

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$ $- \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$ $(k \in S - \{s\})$

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$ $- \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

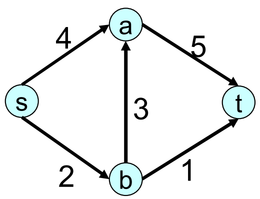
TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

⇒ 左辺$= x(S, T) - x(T, S)$

レポート問題

問1: 次の2つの最大フロー問題に対して、
フロー増加法で最大フローを求めよ
(各反復での残余ネットワークやフローも書くこと)

(a)



(b)