# 数理計画法　第4回

## 2．4　単体法

### 2．4．5　2段階単体法
### 2．4．7　辞書の双対性

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

## 中間試験について

•日時：11月15日（木）午後1時より

•受験資格者：レポートを一回以上提出した学生のみ

•教科書等の持込は不可

•座席は指定

•試験内容：線形計画法の範囲（今日の内容まで）

問題の定式化，単体法，用語の説明，簡単な証明など

（詳しくはWeb上の過去問を参考にしてください）

## レポート問題

•教科書82ページ問2．15、問2．16

•講義に対する感想、意見、要望

•締め切り：11月15日（木）

### レポートの採点について

•全ての問題が解いてある（多少の誤りは許す）ー 2点

•半分以上の問題が解いてある（多少の誤りは許す）ー 1点

•殆どの問題が解かれていない，誤りが非常に多いー 0点

## 先週の内容の復習

### 単体法　ー　LPの解法

•最適解を求める、または非有界性を判定

•ピボット演算を繰り返し行う

•最小添字規則の利用

（変数の添え字が最小のものを優先して選ぶ）

⇒有限回の反復で終了

## 先週の復習 ー ピボット演算

許容辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ $x_1$の係数 < 0 なので

$x_1$ を増やす

$x_1$を $\alpha$ だけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 2$

## 先週の復習ーピボット演算(その2)

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \to 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \to 0$

基底と非基底の入れ替え

基底($x_1$, $x_5$, $x_6$), 非基底($x_4$, $x_2$, $x_3$)

$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$

$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

## 復習:単体法の巡回の例

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -1 | 2 | -1 |
| $x_4$ | 0 | -2 | 1 | -1 |
| $x_5$ | 0 | -3 | -1 | -1 |
| $x_6$ | 0 | 5 | -3 | 2 |

| | | $x_1$ | $x_6$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 7/3 | -2/3 | 1/3 |
| $x_4$ | 0 | -1/3 | -1/3 | -1/3 |
| $x_5$ | 0 | -14/3 | 1/3 | -5/3 |
| $x_2$ | 0 | 5/3 | -1/3 | 2/3 |

| | | $x_1$ | $x_6$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 2 | -1 | -1 |
| $x_3$ | 0 | -1 | -1 | -3 |
| $x_5$ | 0 | -3 | 2 | 5 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -1 | -2 |

| | | $x_5$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 1/3 | 7/3 | -2/3 |
| $x_4$ | 0 | 2/3 | 5/3 | -1/3 |
| $x_1$ | 0 | -1/3 | -1/3 | -1/3 |
| $x_6$ | 0 | -5/3 | -14/3 | 1/3 |

| | | $x_5$ | $x_2$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -1 | -1 | 2 |
| $x_3$ | 0 | 2 | 5 | -3 |
| $x_1$ | 0 | -1 | -2 | 1 |
| $x_6$ | 0 | -1 | -3 | -1 |

| | | $x_5$ | $x_6$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -2/3 | 1/3 | 7/3 |
| $x_3$ | 0 | 1/3 | -5/3 | -14/3 |
| $x_1$ | 0 | -1/3 | 2/3 | 5/3 |
| $x_2$ | 0 | -1/3 | -1/3 | -1/3 |

## 復習:最小添字規則

ピボット演算のとき、

最小添字規則(smallest subscript rule)を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在

  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在

  ⇒ 添字最小のものを選択

## 復習：最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -1 | 2 | -1 |
| $x_4$ | 0 | -2 | 1 | -1 |
| $x_5$ | 0 | -3 | -1 | -1 |
| $x_6$ | 0 | 5 | -3 | 2 |

$x_1$ はどれだけ増やせるか？

$x_4$: 0→0－2α

$x_5$: 0→0－3α

$x_6$: 0→0＋5α

∴　αは最大　0

そのとき　$x_4 = x_5 = 0$

注意：$x_6$ は増加するので、
出る変数の候補ではない！

## 復習：最小添字規則の適用例（続き）

入る変数の候補

出る変数の候補

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -1 | 2 | -1 |
| $x_4$ | 0 | -2 | 1 | -1 |
| $x_5$ | 0 | -3 | -1 | -1 |
| $x_6$ | 0 | 5 | -3 | 2 |

| | | $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 1/2 | 3/2 | -1/2 |
| $x_1$ | 0 | -1/2 | 1/2 | -1/2 |
| $x_5$ | 0 | 3/2 | -5/2 | 1/2 |
| $x_6$ | 0 | -5/2 | -1/2 | -1/2 |

最適

| | | $x_4$ | $x_2$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | -1 | 1 | -2 |
| $x_5$ | 0 | 1 | -2 | -1 |
| $x_6$ | 0 | -2 | -1 | 1 |

## 2段階単体法

### 単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化　$-2x_1 - x_2$

条件　$-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

実は実行不可能なLP

$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

基底解(0,0,-3,4)は
許容解でない

•そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって
判定する？

## 2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

→　単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
　許容解をもたない⇒終了
　許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

## 補助問題の作り方

元の問題 → 補助問題

**元の問題**

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

**補助問題**

人工変数

最小化 $x_a$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_a \geqq 0$

- 大きな$x_a$に対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解
- 元の問題が実行可能 ⇔ 補助問題の最適値＝0
- $(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

  ⇔ $(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

## 補助問題の解き方（その1）

**元問題**

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geqq -1$

$x_1 + x_2 \geqq 1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$

**補助問題**

最小化 $x_a$

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$

$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_a \geqq 0$

初期辞書

元問題の目的関数も追加

$$
\begin{aligned}
z_a &= x_a \\
z &= -x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

負の値なので許容辞書ではない

## 補助問題の解き方（その2）

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 \quad x_a \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 $x_a$ を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

$x_a$ と $x_4$ を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

## 補助問題の解き方（その3）

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

$x_1$ と $x_a$ を入れ替え

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a=0$ ⇒ 元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- $x_a$ が非基底変数

  ⇒ 最終辞書から $x_a$, $z_a$ を削除すると元問題の許容辞書

## 補助問題の解き方(その4)

最終辞書で $x_a$ が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$\begin{aligned} z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\ z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\ x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \end{aligned}$$

$x_1$ と $x_3$ を入れ替え

$$\begin{aligned} \boxed{z_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4} \\ z = -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\ x_1 = 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\ x_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 \end{aligned}$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

## 補助問題の解き方(その5)

最適辞書において $x_a$ が基底に入っている

→ ピボット演算で $x_a$ を基底から出す

$$\begin{aligned} z_a &= 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 \\ z &= -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\ x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\ x_a &= 0 \boxed{+ \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4} \end{aligned}$$

係数が非ゼロの変数と $x_a$ を入れ替え

$x_3$ と $x_a$ を入れ替え

$$\begin{aligned} z_a &= 0 + x_a \\ z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 + 2x_a - x_4 \end{aligned}$$

$x_a$ が非基底にある

⇒ $x_a, z_a$ を削除すると

$$\begin{aligned} z &= -1 - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

元問題の許容辞書

## 2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$\begin{aligned} z &= -1 - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

$x_2$ と $x_1$ を入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 - 2x_4 \\ x_2 &= 1 - x_1 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

$x_4$ と $x_3$ を入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_1 - x_3 \\ x_4 &= 0 - x_3 \end{aligned}$$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

## 2段階単体法の流れ

- 入力：不等式標準形のLP

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、
  元問題の実行可能性を調べる
  許容解をもたない ⇒ 終了
  許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用
  非有界 ⇒ 終了
  有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

## 辞書の双対性

主問題の辞書と双対問題の辞書の関係

→ 双対定理の証明

主問題 → 主問題の辞書

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

$z = 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$

最適⇔ $c_j \geqq 0$ $(j = 1,\ldots,n)$

## 双対問題の辞書

双対問題(の不等式標準形) → 双対問題の辞書

最小化 $-b_1y_1-\cdots-b_my_m$

条件 $-a_{11}y_1-\cdots-a_{m1}y_m \geqq -c_1$

$\cdots$

$-a_{1n}y_1-\cdots-a_{mn}y_m \geqq -c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

最大化 $b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件 $a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

最小化 $w$

条件 $w = 0 - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$

$\cdots$

$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_{m+n} \geqq 0$

双対問題の辞書が

許容⇔$c_j \geqq 0$ $(j = 1,\ldots,n)$

最適⇔$b_i \leqq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$

## 2つの辞書の比較(その1)

主問題の初期辞書

$z = 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

双対問題の初期辞書

$w = 0 - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$

$\cdots$

$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$

一般の場合

$$\begin{array}{cccc} \alpha & c_1 & \cdots & c_n \\ -b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & \\ -b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{cccc} -\alpha & -b_1 & \cdots & -b_m \\ c_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{m1} \\ & & \cdots & \\ c_n & -a_{1n} & \cdots & -a_{mn} \end{array}$$

行列を転置して
一部の符号を反転

## 2つの辞書の比較(その2)

主問題の辞書

$z = \alpha + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

双対問題の辞書

$w = -\alpha - b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$

$\cdots$

$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0$ $(\forall i)$

⇔双対問題の辞書が最適

主問題の辞書が最適⇔$c_j \geqq 0$ $(\forall j)$

⇔双対問題の辞書が許容

## 双対定理の証明

主問題に最適解が存在

⇒ 主問題の許容かつ最適な辞書が存在

$b_i \leqq 0\ (\forall i),\ c_j \geqq 0\ (\forall j)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $c_1$ | $\cdots$ | $c_n$ |
| $-b_1$ | $a_{11}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ |
| | | $\cdots$ | |
| $-b_m$ | $a_{m1}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ |

対応する双対問題の辞書を作成

⇒ 許容かつ最適な辞書になっている

⇒ 双対問題に最適解が存在、

目的関数値は共に$\alpha$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\alpha$ | $-b_1$ | $\cdots$ | $-b_m$ |
| $c_1$ | $-a_{11}$ | $\cdots$ | $-a_{m1}$ |
| | | $\cdots$ | |
| $c_{mn}$ | $-a_{1n}$ | $\cdots$ | $-a_{mn}$ |