数理計画法　第3回

2．3　諸定理
2．4　単体法

担当：　塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

今後の予定

- 来週（10月25日）は**休講**（塩浦が出張のため）
- 11月1日（木）：講義
- 11月8日（木）：研究室見学会のため休講（予定）
- 11月15日（木）：**中間試験**（予定）

復習：主問題と双対問題

主問題(primal problem)	双対問題(dual problem)
最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$	最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$
条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$	条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$	$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$
・・・	・・・
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$	$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$	$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

主問題の i 番目の不等式
$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqq b_i$
⇔ 対応 ⇔
双対問題の i 番目の変数
$y_i \geqq 0$

主問題の j 番目の変数
$x_j \geqq 0$
⇔ 対応 ⇔
双対問題の j 番目の不等式
$a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\cdots+a_{mj}y_m \leqq c_j$

復習：弱双対定理

弱双対定理 (weak duality theorem)
x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

xの目的関数値 $\Sigma_j c_j x_j \geqq \Sigma_i b_i y_i$ yの目的関数値

弱双対定理の証明

シグマの順番を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

…

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

…

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

復習：弱双対定理の系

系2．1

主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能

双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

系2．2

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒　**x**: 主問題の最適解，**y**: 双対問題の最適解

復習：双対定理

定理2．3（双対定理 duality theorem）

主問題または双対問題が最適解をもつ

⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明は次回

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理2．4：

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

相補性条件
(complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\Sigma_i a_{ij} y_i \leqq c_j$　と　$x_j \geqq 0$　のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\Sigma_j a_{ij} x_j \geqq b_i$　と　$y_i \geqq 0$　のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

$\Sigma_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　$(\forall j = 1, 2, \ldots, n)$

$\Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, m)$

証明:　　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\Sigma_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\Sigma_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　⇔　相補性

2．4　単体法(simplex method)

- LPの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

辞書（その1）

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

⇒

最小化　z

条件　$z = 0 \quad + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　辞書(dictionary)

辞書（その2）

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

⇒

最小化　z

条件　$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$$
\begin{aligned}
z &= 0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
&\cdots \\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable):左辺に表れる変数

基底解(basic solution):非基底変数を0としたときの解
（許容とは限らない）

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

➡ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書

⇔ 基底解の各成分が非負

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒ 許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒ 許容辞書ではない

辞書の行列表現

辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3
\end{aligned}
$$

➡

0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation):より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ x_1の係数 < 0 なので
x_1 を増やす

x_1をαだけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4-2\alpha, 4-2\alpha, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには $\alpha \leq 2$

ピボット演算（その2）

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$
$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \to 2$ とすると
解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$
とくに、基底変数 $x_4 = 4 \to 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$
$x_1 = 2 - (½)x_4 \quad - x_2 + (½)x_3$
$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$
$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 \quad + 3x_3$

x_1を基底に入れる
x_4を基底から出す

辞書の書き換え
（ピボット演算終了）

ピボット演算2回目（その1）

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$
$x_1 = 2 - (½)x_4 \quad - x_2 + (½)x_3$
$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$
$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 \quad + 3x_3$

z を減らしたい
⇒ x_3の係数 < 0 なので
x_3 を増やす

基底解(2,0,0,0,0,9)
目的関数値 z = -4

x_3をαだけ増やすと
目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$
解は
$(2 + (½)\alpha, 0, \alpha, 0, \boxed{0 - 5\alpha}, 9 + 3\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 0$

ピボット演算2回目（その2）

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$
$x_1 = 2 - (½)x_4 \quad - x_2 + (½)x_3$
$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$
$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 \quad + 3x_3$

$x_3 = 0 \to 0$ とすると
解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$
とくに、基底変数 $x_5 = 0 \to 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_3, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_5)

$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$
$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$
$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$
$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

x_3を基底に入れる
x_5を基底から出す

辞書の書き換え
（ピボット演算終了）

ピボット演算に関する用語

- 1回目のピボット演算
  基底解 (0,0,0,4,4,1) → (2,0,0,0,0,9)
  非退化(nondegenerate)：基底解が変化する
- 2回目のピボット演算
  基底解 (2,0,0,0,0,9) → (2,0,0,0,0,9)
  退化(degenerate)：基底解が変化しない

最適性の判定

$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

↓

任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geqq -4$

↓

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は z = -4 なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 z = 0

x_1の係数 = -2 < 0 なので

x_1 を増やす ⇒ z が減る

x_1をα増やすと

解は

$(\alpha, 0, 0, 4+2\alpha, 4+2\alpha, 1+4\alpha)$

目的関数値 $z = -2\alpha$

αを任意に増やしても解は許容

⇒ 非有界

単体法の流れ

- 入力：許容辞書（および基底）
- 出力：有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1：最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 x_s にする

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒x_s を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数 x_t にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

単体法の問題点

- 反復回数は有限回か？

  巡回(cycling) ー 同じ辞書が繰り返し現れること

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x3 \geqq 0$

⇒

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

最小添字規則

ピボット演算のとき、
最小添字規則(smallest subscript rule)を適用
⇒ 有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: 0→0−2α

x_5: 0→0−3α

x_6: 0→0+5α

∴ α は最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意：x_6 は増加するので、
出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例(つづき)

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

今週のレポート問題

- 教科書81ページ問2．11
- 教科書81ページ問2．12
- 教科書82ページ問2．14
- 次のLP（許容辞書）を単体法で解け

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

締め切り　11月1日（木）