# 数理計画法　第2回

## 2．1　線形計画問題と<br>その標準形
## 2．2　双対問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

## 今日の講義の流れ

- 先週の復習
- 不等式標準系，等式標準系
- 双対問題
- LPの諸定理

## 先週の内容の復習

線形計画問題（LP）
　目的関数が線形関数，制約式も線形式の数理計画問題

- LPの**不等式標準形**　◆目的は**最小化**
  ◆制約式は「**左辺≧右辺**」の形
  ◆各変数は**非負**

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

## 不等式標準形への変形

命題2．1：任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】　等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

【目的関数の－１倍】　最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longrightarrow \quad \text{最小化} \ -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約の－１倍】　不等式を “≦” から “≧” へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \quad \Longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge -b$$

## 不等式標準形への変形

【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

$x_j$（非負制約なし）⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geqq 0, x_{j2} \geqq 0$

## 不等式標準形への変形の例

最大化 $3x + 2y$
条件 $x + y = 1$
$x \geqq 0$

⇒

最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) \leqq 1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0$

## 「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

$x_j$（非負制約なし）⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geqq 0, x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：$P_1$　　変換後の問題：$P_2$

**P1とP2は本質的に等価**

- $(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⇒ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし$s_{j1} = s_j, s_{j2} = 0$（$s_j \geqq 0$ のとき）
$s_{j1} = 0, s_{j2} = -s_j$（$s_j < 0$ のとき）

例：$(x, y) = (3, -2)$ は $x + y = 1, x \geqq 0$ を満たす
⇒ $(x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

## 「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

$x_j$（非負制約なし）⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geqq 0, x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：$P_1$　　変換後の問題：$P_2$

**P1とP2は本質的に等価**

- $(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⇒ $(t_1, \ldots, t_{j1} - t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

例：$(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす
⇒ $(x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は $x + y = 1, x \geqq 0$ を満たす

# 等式標準形

- LPの**等式標準形**

◆目的は**最小化**
◆制約は**等式**
◆各変数は**非負**

最小化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$
条件 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$
$\cdots$
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$
$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, \ldots, x_n\geqq 0$

# 等式標準形への変形

命題2．2：任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる（命題2．1）
- 不等式「左辺≧右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数 $x_{n+i}$ を利用（**スラック変数**）

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$
$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, x_3\geqq 0$

$\Longrightarrow$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$
$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, x_3\geqq 0, x_4\geqq 0$

# 双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい
（最適値の下界値の計算）

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$
条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①
$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$ ②
$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③
$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, x_3\geqq 0$

⇒ 制約を足し合わせてみる

- 目的関数≧②×3＋③＝ $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geqq -13$
- 目的関数≧①×0.5＋②×0.5＝ $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geqq -4$

より良い下界

# 双対問題

より一般に，非負実数
$y_1, y_2, y_3$ を使うと

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$
条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①
$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$ ②
$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③
$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, x_3\geqq 0$

①× $y_1$ ＋②× $y_2$ ＋③× $y_3$

左辺：$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$

右辺：$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left.\begin{array}{l} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\ -2y_1 \quad - 3y_3 \leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1 \end{array}\right\}$$

が成り立つならば
目的関数≧左辺≧右辺
＝ $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

## 双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなLP

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2\\
-2y_1 \qquad - 3y_3 &\leqq -1\\
y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1\\
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

もとの問題に
対する
双対問題

もとの問題・・・・主問題

## 主問題と双対問題

### 主問題

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件
$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &\geqq b_1\\
a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n &\geqq b_2\\
&\cdots\\
a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n &\geqq b_m\\
x_1\geqq 0,\ \ldots,\ x_n &\geqq 0
\end{aligned}
$$

### 双対問題

最大化 $b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$

条件
$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m &\leqq c_1\\
a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m &\leqq c_2\\
&\cdots\\
a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m &\leqq c_n\\
y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0,\ \ldots,\ y_m &\geqq 0
\end{aligned}
$$

行列表現

最小化 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

条件 $A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

最大化 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

条件 $A^T\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$

## 主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順（1）双対問題を不等式標準形に書き換え

（2）書き換えた問題の双対問題をつくる

（3）得られた双対問題を変換すると

もとの問題に一致することを確かめる.

## 等式標準形の双対問題

- LPの等式標準形

最小化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,..,m)$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$

不等式標準形に
変換

最小化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i = 1,2,..,m)$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$

## 等式標準形の双対問題

双対問題をつくる

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i''$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i'' \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

$y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0 \quad (i = 1,2,\dots,m)$

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

$y_i' - y_i''$ を
非負制約なし変数
$y_i$ に置き換え

等式標準形のLPに対する双対問題

## 諸定理 ― LPの基本定理

定義：不等式標準形のLPに対し

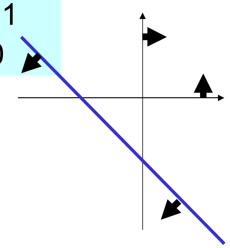
- 実行可能⇔許容解が存在する
- 実行不可能⇔許容解が存在しない

最大化 x + 2y
条件 -x - y≧ -3
x, y≧ 0

実行可能
（1，1）は許容解

最大化 x + 2y
条件 -x - y≧ 1
x, y≧ 0

実行不可能



## LPの基本定理（その2）

定義：実行可能なLPは（最小化の場合）

- 有界 ⇔ 任意の許容解の目的関数値が ある定数より大きい
- 非有界 ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 x + 2y
条件 -x - y≧ -3
x, y≧ 0

有界
目的関数値≧0

最小化 - x - y
条件 x + y ≧ 0
x, y≧ 0

非有界
任意のα>0に対し(α，α)は許容解
目的関数値＝－2α

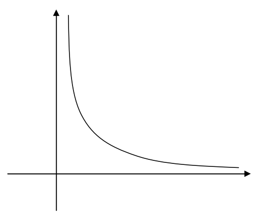
## LPの基本定理（その3）

定理2．1（基本定理）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界 ⇒ 最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化 y
条件 xy≧ 1
x, y≧ 0

最適値＝0
でも y = 0 なる許容解はない



## 弱双対定理(その1)

定理2．2(弱双対定理)

**x**: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \ge \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　双対問題の目的関数値

## 弱双対定理(その2—証明)

シグマの順番を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

## 弱双対定理(その3ー系)

系2．1

主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能

双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

証明: 対偶　(双対:実行可能⇒主:有界)　を示す

双対問題が実行可能と仮定

**y**:　双対問題の許容解、　$\alpha = \Sigma b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha$　　∴　主問題は有界

## 弱双対定理(その4ー系)

系2．2

**x**: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒　**x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理(定理2．2)を使って証明すること

## 弱双対定理（その5－系）

**例2．3**

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4\\
-2x_1 \qquad - 4x_3 &\geqq -4\\
4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1\\
x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2\\
-2y_1 \qquad - 3y_3 &\leqq -1\\
y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1\\
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$-2\times2-0-0=-4=-4\times(3/5)-4\times(2/5)-0$

⇒　系2．2より、 x, y はそれぞれ最適解

## 双対定理

定理2．3：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

## 主問題と双対問題の答えの組合せ

| | | 双対問題 実行可能 最適解 | 双対問題 実行可能 非有界 | 双対問題 実行不可能 |
|---|---|---|---|---|
| 主問題 実行可能 | 最適解 | ○（双対定理） | ×（系2．1） | ×（双対定理） |
| 主問題 実行可能 | 非有界 | ×（系2．1） | ×（系2．1） | ○（系2．1） |
| 主問題 | 実行不可能 | ×（双対定理） | ○（系2．1） | ○ |

## 今週のレポート問題

- 80ページ問2．1
- 81ページ問2．4
- 双対問題の双対問題が主問題に一致することを示せ.
- 81ページ問2．8（系2.2の証明）

締め切り　10月18日（木）
提出は授業開始後10分以内に.
それ以降は受け取りません.
情報科学研究科の私の研究室に持ってきてもOK.