数理計画法 第1回

1. 数理計画問題
2. 線形計画

担当： 塩浦昭義
情報科学研究科（工学部 電子情報・物理工学科）
徳山・塩浦研究室 准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

「数理計画法」の授業の目的

- 数理計画問題、およびその解法について学ぶ

使用する教科書

☆田村明久、村松正和著
「最適化法」、工系数学講座17巻
共立出版、2002年
☆適宜資料を配布

成績評価の方法および基準

- 中間試験(50点)
- 期末試験(50点)
- 演習レポートの提出状況(最大20点)　により評価
- 60点以上で合格
- 出席点は全く考慮しない
- レポートを一回以上提出した者のみ
試験の受験を許可する

レポートの
提出時間は
13:10まで
それ以降は
0点扱い

授業に関する情報のページ
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/

単位が不可となる条件

- 線形計画に関するレポートを一度も提出しない
- 中間試験の得点が25点未満
- ネットワーク計画，非線形計画に関するレポートを
一度も提出しない
- 期末試験の得点が25点未満
- 総得点が60点未満

以上の条件のいずれかに
該当する場合は単位が不可

数理計画問題とは？

- 本来の意味

数理（数学）を使って
計画を立てるための問題

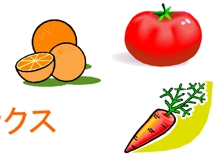
- 現在では. . .

与えられた評価尺度に関して
最も良い解を求める問題
（最適化問題）

例1：飲料会社のジュース生産計画

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい
- 資源　ー　オレンジ、にんじん、トマト
- 生産するジュース

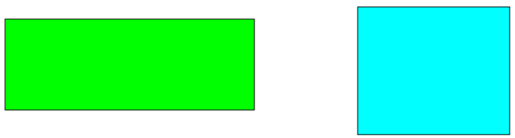
　　ー　オレンジ100、トマト100、ミックス



種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

例2：長方形の問題

- 面積が1以上の長方形を描く



- 外周の長さを最小にするには？

数理計画問題の解き方

- 問題を数式を使って数学的に表現
（定式化）
- 定式化された問題にアルゴリズムを適用、
答えを求める

この授業の内容

数理計画問題を解く様々なアルゴリズムの説明

例1の定式化

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

•各ジュースの生産量を変数で表現

x:オレンジ100の生産量

y:トマト100の生産量

z:ミックスの生産量

例1の定式化(続き)

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

最大化 $2x + 2y + 3z$ 　収益を最大に

条件 $5x + 3z \leqq 8$ 　使用できるオレンジの量は8以下

$2z \leqq 2$

$4y + z \leqq 9$

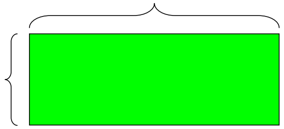
$x, y, z \geqq 0$ 　各ジュースの生産量は非負

例2の定式化

- 面積が1以上の長方形を描く
- 外周の長さを最小にするには?

y:横の長さ

x:縦の長さ



最小化 $2x + 2y$ 　外周の長さを最小に

条件 $xy \geqq 1$ 　面積は1以上

$x, y \geqq 0$ 　縦横の長さは非負

線形計画問題、非線形計画問題

例1:

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件 $5x + 3z \leqq 8$

$2z \leqq 2$

$4y + z \leqq 9$

$x, y, z \geqq 0$

すべて線形の等式、不等式で表現されている

➡ 線形計画問題

例2:

最小化 $2x + 2y$

条件 $xy \geqq 1$

$x, y \geqq 0$

非線形の式が使われている

➡ 非線形計画問題

整数計画問題

例1の変種:

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件
$$
\begin{aligned}
5x \quad\quad + 3z &\leqq 8 \\
2z &\leqq 2 \\
4y + \quad z &\leqq 9 \\
x, y, z &\geqq 0 \\
x, y, z &\text{ は整数}
\end{aligned}
$$

変数に整数制約が付加される

⇒ **整数計画問題**

数理計画問題に関する用語

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件
$$
\begin{aligned}
5x \quad\quad + 3z &\leqq 8 \\
2z &\leqq 2 \\
4y + \quad z &\leqq 9 \\
x, y, z &\geqq 0
\end{aligned}
$$

目的関数:最小化または最大化される関数

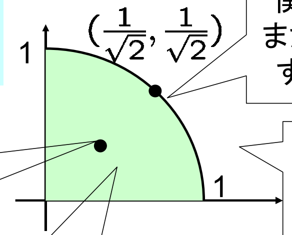
制約式:問題の中の条件式

数理計画問題に関する用語(続き)

最大化 $x + y$

条件 $x^2 + y^2 \leqq 1$

$x, y \geqq 0$



最適解:目的関数を最大または最小にする許容解

許容解:制約式をすべて満たすベクトル (x, y)

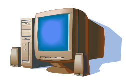
最適値:最適解の目的関数値

許容解領域:許容解すべての集まり

整数計画の例1:ナップサック問題

- ナップサックにものを詰め込む

500g 10万



10kg 15万

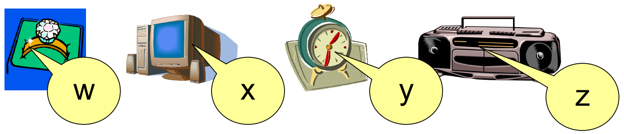
1kg 5千

5kg 1万

- ナップサックの重量制限(10kg)を越えてはならない
- 総価値を最大にしたい

整数計画の例1：ナップサック問題

定式化ー各アイテムに変数を割り当て



宝石を選んだらw = 1，選ばなかったらw = 0

選んだアイテムの総価値

最大化　10w + 15x + 0.5y + z

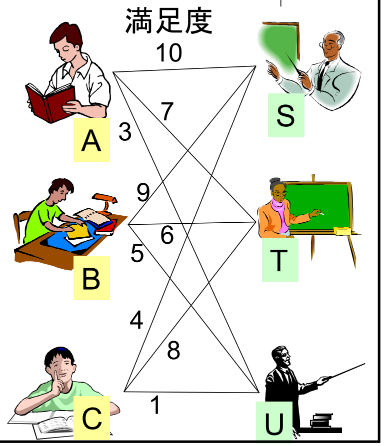
条件 0.5w + 10x + y + 5z ≦ 10

w, x, y, z は 0 または 1

選んだアイテムの総重量

整数計画の例2：研究室配属

- 各研究室に学生一人を割り当てる
- 学生の満足度の合計を最大にしたい



整数計画の例2：研究室配属

定式化

学生と先生のペアに変数を割り当て

x_{AS}, x_{AT}, x_{AU}, x_{BS}, ...

A を S に割当てたら $x_{AS} = 1$

割り当てなければ $x_{AS} = 0$

最大化　$10x_{AS} + 7x_{AT} + 3x_{AU} + \ldots$

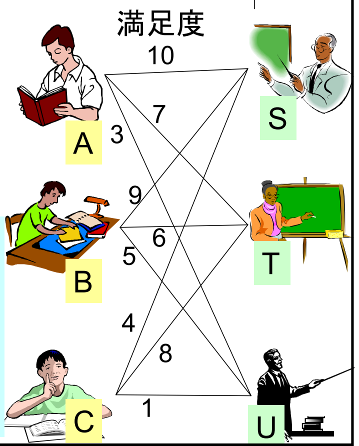
条件 $x_{AS} + x_{AT} + x_{AU} = 1$

...

$x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} = 1$

...

各変数は 0 または 1



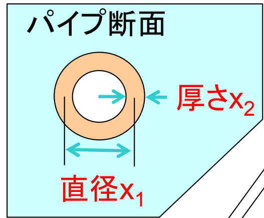
非線形計画の例1：構造設計

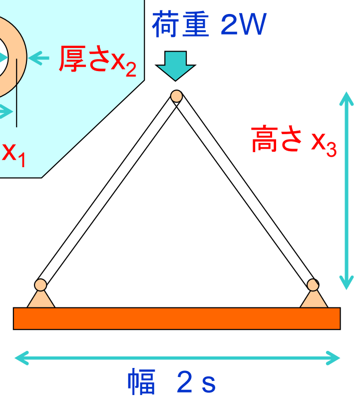
2本の鉄パイプ（トラス）で荷重 2W を支える

- 鉄パイプの総重量（ρ は密度）

$$2\pi\rho x_1 x_2 \sqrt{s^2 + x_3^2}$$

→　最小にしたい





- トラスの高さの制限：$x_3 \le b_1$
- パイプの厚さの制限：$\dfrac{x_1}{x_2} \le b_2$

非線形計画の例1：構造設計

•トラスが重みにより変形したまま元に戻らない、ということにならないための条件：

$$W\sqrt{s^2+x_3^2} \le b_3 x_1 x_2 x_3$$

•パイプが折れ曲がらないための条件：

$$W\left(s^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}} \le b_4 x_1 x_3 (x_1^2+x_2^2)$$

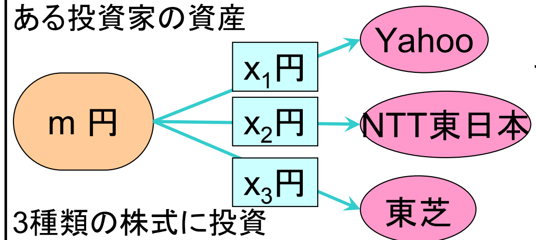
•非負条件：　$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

非線形計画の例2：ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオ：株式などの金融資産を組み合わせたもの

投資家が最も満足する投資方法を求めたい

ある投資家の資産



それぞれ
現在の価格 p_i
来月の価格 Q_i
（確率変数）

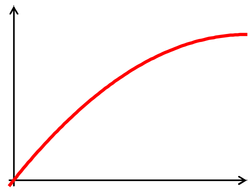
3種類の株式に投資

1ヵ月後の資産： $M=\dfrac{Q_1x_1}{p_1}+\dfrac{Q_2x_2}{p_2}+\dfrac{Q_3x_3}{p_3}$ （確率変数）

非線形計画の例2：ポートフォリオ選択問題

来月の資産Mに対する満足度：U(M) = M − β M^2

U(M)の期待値を最大にしたい



$$E[U(M)]=\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} - \beta\left[\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$-\beta \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$$

r_i は Q_i/p_i の平均
σ_{ij} は
$(Q_i/p_i - r_i)(Q_j/p_j - r_j)$ の共分散

条件： $x_1+x_2+x_3=m,\quad x_1,x_2,x_3 \ge 0$

2．線形計画
2．1　線形計画問題とその標準形

線形計画問題（LP）の定義

•目的関数が線形関数，制約式も線形式の最適化問題

目的は「最大化」「最小化」どちらでもよい

最大化　2x + 2y + 3 z
条件　5x　　　+ 3 z ≦ 8
　　　　　　　2 z = 2
　　　　4y +　z ≧ 9
　　　x, y ≧ 0

制約式は「≧」「＝」「≦」どれでもよい

制約式は「不等号つき」「不等号なし」どちらでもよい

LPの不等式標準形

任意の形のLPを扱うのは面倒

⇒ 不等式標準形

- ◆目的は最小化
- ◆制約式は「左辺≧右辺」の形
- ◆各変数は非負

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

次回の予定

- 線形計画
  - ☆線形計画問題とその標準形
  - ☆双対問題
- 教科書を生協で購入しておいてください