数理計画法　第8回

ネットワーク計画

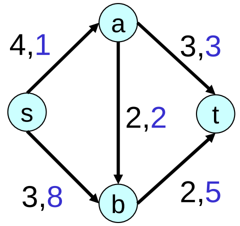
3．最小費用フロー問題

非線形計画

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

レポート問題の解答例

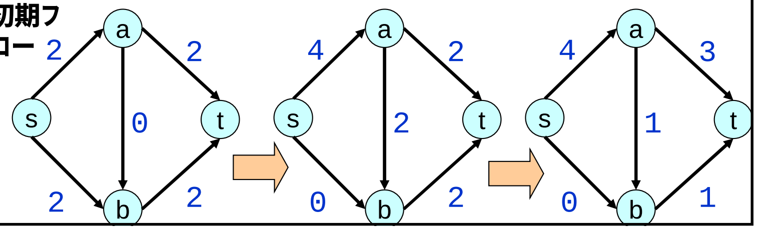
問題1 需要供給量4



最小化 $x_{sa}+8x_{sb}+2x_{ab}+3x_{at}+5x_{bt}$

条件
$$x_{sa}+x_{sb}=4$$
$$x_{at}+x_{ab}-x_{sa}=0$$
$$x_{bt}-x_{sb}-x_{ab}=0$$
$$-x_{at}-x_{bt}=-4$$
$$0\le x_{sa}\le 4,\ 0\le x_{sb}\le 3,\ 0\le x_{ab}\le 2$$
$$0\le x_{at}\le 3,\ 0\le x_{bt}\le 2$$

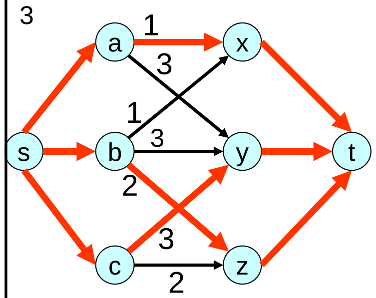
初期フロー



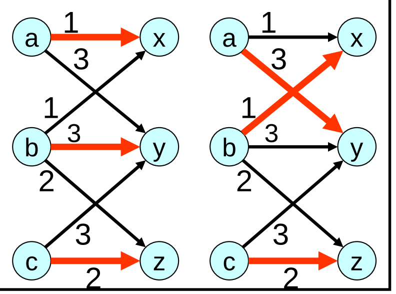
レポート問題の解答例

問題2　各枝の容量は1
s から出る枝と t に入る枝の費用は0
それ以外は各枝の数値を参照

需要供給量
3

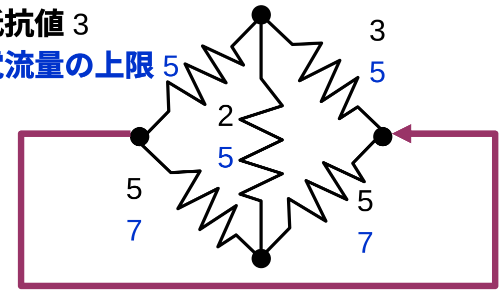


その他の最小費用フロー



発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

抵抗値 3
電流量の上限 5



10アンペアの電流を流す

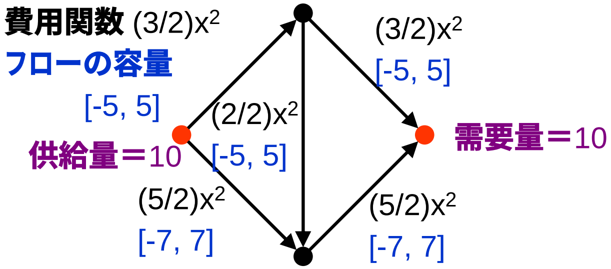
各抵抗に流れる電流量はどのように決まるか？
⇒回路全体で消費される総エネルギー量を最小にする
⇒ 最小費用流問題へ

発展：目的関数が非線形関数の最小費用流問題

費用関数 $(3/2)x^2$

フローの容量

[-5, 5]



対応する非線形最小費用流問題（費用が２次関数）

ー負閉路消去法の拡張版を使って解くことが可能

非線形計画問題とは？

目的関数や制約式が必ずしも線形でない数理計画問題

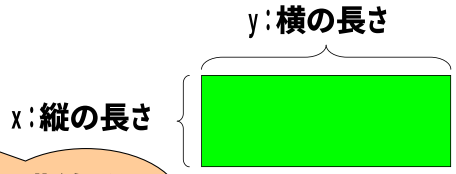
例：長方形の外周最小化問題

最小化　$2x + 2y$

条件　$x\,y \geqq 1$

$x, y \geqq 0$

非線形の不等式



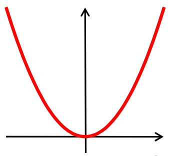
⇒ 非線形計画問題

注意:線形計画問題は非線形計画問題の特殊ケース

非線形関数の例（その１） [p.87]

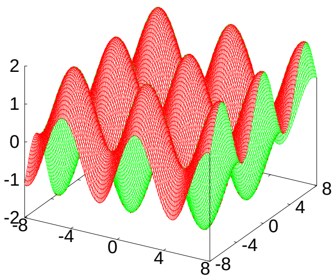
非線形関数　ー　線形でない関数

微分可能な非線形関数の例

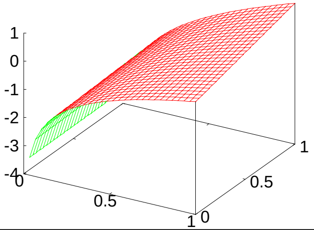


$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$



$$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$$

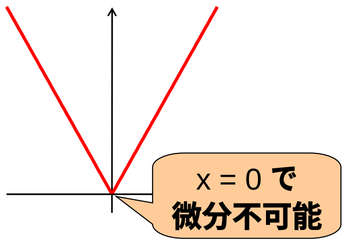


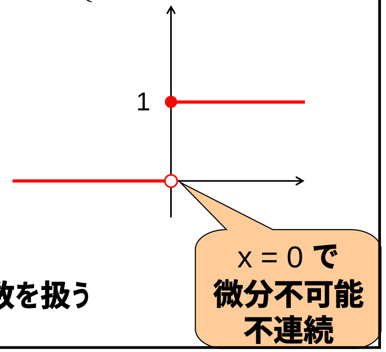
非線形関数の例（その２） [p.88]

微分不可能な非線形関数の例

$$f_4(x) = |x|$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0 \text{のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$





この授業：

主に何回でも微分可能な関数を扱う

非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]

制約なし最適化問題

入力： **目的関数** f(x)
問題： **最小化**　f(x)　**条件**　**なし**

制約つき最適化問題

入力： **目的関数** f(x), **制約を表す関数** $g_i(x)$ (i = 1, 2, …, m)
問題： **最小化**　f(x)　**条件**　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

この講義では、制約なし問題を主に扱う

非線形計画問題の分類 [p.6,97,131]

制約つき問題と制約なし問題の関係

•制約つき問題は制約なし問題に変形できる

最小化　f(x)　**条件**　$g_i(x) \leqq 0$ (i = 1, 2, …, m)

⇒ **最小化**　f(x) + h(x)　**条件**　**なし**

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1,2,\ldots,m) \\ M & \text{(その他)} \end{cases}$$

M は十分に大きい正数

(注意) この制約なし問題を直接解くことは実用上難しい

•制約なし問題を繰り返し解くことにより、制約つき問題を解くことが出来る

→p.146 **ペナルティ関数法、バリア関数法**

勾配ベクトル [p.89]

関数 f の勾配ベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

一変数関数の場合は $\nabla f(x) = f'(x)$

例：

$f_1(x) = x^2 \Rightarrow \nabla f_1(x) = 2x$

$f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$

$$\Rightarrow \nabla f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

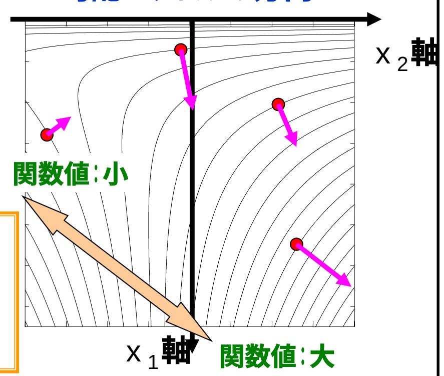
勾配ベクトル (続き) [p.89]

$f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \log x_1$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1/x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

関数$_3$の等高線と勾配ベクトルの方向



勾配ベクトルのイメージ：
■関数という山を登るときに最も急な方向
■関数値が増加する方向

勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

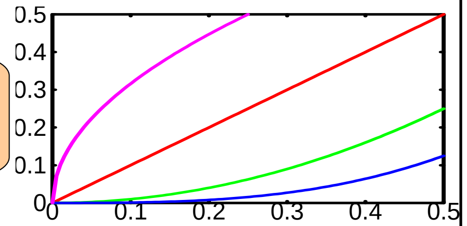
関数 f は勾配ベクトルを傾きとする**線形関数により近似**できる

(一次の) テイラー展開

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

記号 o(α)：α→0のときにg(α)/α→0となる関数g(α)を表す.

α², α³など, αより速く0に近づく関数を表す



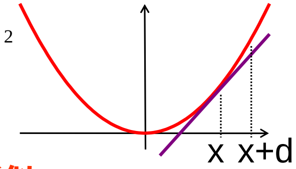
勾配ベクトルとテイラー展開[p.89]

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{d} + o(\|\boldsymbol{d}\|)$$

例： $f_1(x) = x^2$ $\quad \nabla f_1(x) = 2x$

$$f_1(x+d) = (x+d)^2 = x^2 + (2x)d + d^2$$

$$= x^2 + (2x)d + o(|d|)$$



関数 f を点 x において**線形関数で近似**

$(x+d)^2$ と $x^2 + 2xd$ の誤差 ー |d|が小さければ十分小さい

演習問題

問題１:下記の4つの関数の勾配ベクトルを計算しなさい

$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ $\quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$f_3(x_1, x_2) = x_1 \log x_2 - x_2 \log x_1$

$f_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T V \boldsymbol{x}$ (ただし, $\boldsymbol{x}$はn次元ベクトル, Vは$n \times n$対称行列)

問題２:関数 f_1, f_2 に対し, x＝(1, 1) におけるテイラー展開を求めなさい. また, テイラー展開と元の関数の間の誤差が0.1以下となるxの範囲を (大雑把で良いので) 計算しなさい.

問題３:次の2つの非線形計画問題

「最大化 $f_1(x_1, x_2)$ 　条件 $f_2(x_1, x_2) \leqq 5$」

「最小化 $f_2(x_1, x_2)$ 　条件 $f_1(x_1, x_2) = 3$」

を (手計算で) 解きなさい. また, 問題および最適解を図で表しなさい.

安定結婚問題

- n人の男性をn人の女性に割り当てたい
- 男性は女性に対する選好順序をもつ
- 女性は男性に対する選好順序をもつ

例：n＝3の場合

男A：1 2 3　　女1：BAC
男B：3 1 2　　女2：BAC
男C：1 3 2　　女3：CAB

男性Aは女性1, 女性2, 女性3の順に好き
女性1は男性B, 男性A, 男性Cの順に好き

割当の例：A－1, B－3, C－2

安定結婚問題

■現在の相手から離れて駆け落ちする男女のペアが存在しないように割り当てる（安定な割当を求める）

例：n＝3の場合

男A：1 2 3　女1：BAC
男B：3 1 2　女2：BAC
男C：1 3 2　女3：CAB

安定な割当の例：
A－2，B－3，C－1

割当の例：A－1，B－3，C－2
男性Cは現在のパートナー（女性2）より女性3が好き
女性3は現在のパートナー（男性B）より男性Cが好き
➡ 男性Cと女性3は駆け落ちする（割当は不安定）

安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする

➡ 男A：1 2 3 Ⓐ　① 女1：BAC
男B：3 1 2 Ⓑ　② 女2：BAC
男C：1 3 2 Ⓒ　③ 女3：CAB

安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする

男A：1 2 3 Ⓐ　① 女1：BAC
➡ 男B：3 1 2 Ⓑ　② 女2：BAC
男C：1 3 2 Ⓒ　③ 女3：CAB

安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは

   (b)仮パートナーZがいる
      (b-i) XよりZが好き➔XのパートナーZ候補リストからYを削除

男A：1 2 3 Ⓐ　① 女1：BAC
男B：3 1 2 Ⓑ　② 女2：BAC
➡ 男C：1 3 2 Ⓒ　③ 女3：CAB

安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは

   (b)仮パートナーZがいる

   (b-ii) ZよりXが好き➔Yの仮パートナーをXに変更，
   Zのパートナー候補リストからYを削除

男A：1 2 3 Ⓐ …… ① 女1：BAC
男B：3 1 2 Ⓑ　② 女2：BAC
➡ 男C：1 3 2 Ⓒ → ③ 女3：CAB

安定な割当を求めるアルゴリズム

1. 仮パートナーのいない男性Xをひとり選ぶ
2. 男性Xはパートナー候補のうち，一番好きな女性Yにプロポーズ
3. プロポーズされた女性Yは
   (a)仮パートナーがいない➔XをYの仮パートナーとする
   (b)仮パートナーZがいる
   (b-i) XよりZが好き➔XのパートナーリストからYを削除

   (b-ii) ZよりXが好き➔Yの仮パートナーをXに変更，
   Zのパートナー候補リストからYを削除

男A：1 2 3 Ⓐ　① 女1：BAC
男B：3 1 2 Ⓑ　② 女2：BAC
男C：1 3 2 Ⓒ …… ③ 女3：CAB

最終的に得られる割当

安定な研究室配属

- n人の学生をm研究室（m≦n）に割り当てたい
- 各研究室は学生の定員をもつ．定員の合計値≧n
- 学生は研究室に対する選好順序をもつ
- 研究室は学生に対する選好順序をもつ

例：n＝5，m＝3の場合

学生A：1 2 3
学生B：1 2 3
学生C：1 3 2
学生D：3 1 2
学生E：3 2 1

研究室1（定員2）：EDBAC
研究室2（定員2）：BACDE
研究室3（定員2）：CEADB

安定な研究室配属

安定な配属案：次のような不満が生じない配属案

- Y研究室に配属されていない学生Xに対し，
  - □Y研究室は現在のある配属学生よりXのほうが欲しい
  - □学生Xの現在の配属先よりY研究室の方が好き

学生A：1 2 3
学生B：1 2 3
学生C：1 3 2
学生D：3 1 2
学生E：3 2 1

研究室1（定員2）：EDBAC
研究室2（定員2）：BACDE
研究室3（定員2）：CEADB

この配属案は安定ではない
学生Bは研究室2より1が好き
研究室1は学生CよりBが欲しい

安定な研究室配属

安定な配属案:次のような不満が生じない配属案

- Y研究室に配属されていない学生Xに対し,
  - Y研究室は現在のある配属学生よりXのほうが欲しい
  - 学生Xの現在の配属先よりY研究室の方が好き

学生A:1 2 3
学生B:1 2 3
学生C:1 3 2
学生D:3 1 2
学生E:3 2 1

研究室1 (定員2) :EDBAC
研究室2 (定員2) :BACDE
研究室3 (定員2) :CEADB

この配属案は安定である
(先のアルゴリズムと同様なやり方で求められる)

演習問題 (レポート提出の必要なし)

問題4:下記の問題例に対し,説明したアルゴリズムを使って安定な割当を求めなさい.

また,男女の立場を入れ替えてアルゴリズムを適用し,安定な割当を求めなさい.

男A:2 4 1 3
男B:3 1 4 2
男C:2 3 1 4
男D:4 1 3 2

女1:BADC
女2:DCAB
女3:ADCB
女4:BADC

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

× 残り全勝しても80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83	71		1	6	1
フィリーズ	80	79	1		0	2
メッツ	78	78	6	0		0
エクスポス	77	82	1	2	0	

×

残り試合全勝で83勝
➔ブレーブスが全敗しないと優勝できない
➔メッツが84勝してしまう

各チームの優勝可能性を判定したい

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数 ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス	83 83	71		1	6	1
フィリーズ	80 81	79	1		0	2
メッツ	78 84	78	6	0		0
エクスポス	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で下位チームが上位チームに勝った場合

○

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝の可能性はゼロではない

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

では，次の場合は？（アメリカンリーグ東地区）

他の地区所属のチームとの試合

	勝	敗	残り試合数 ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ	タイガース	その他
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13
タイガース	49	86	3	4	0	0		20

タイガースは残り試合全勝すると76勝
　ヤンキースの勝ち数以上➔優勝の可能性？

最大フロー問題を使って判定ができる

プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

タイガースにとって都合の良いケースのみ考える
- ●タイガースは残り全勝
- ●東地区の他チームは他地区との試合において全敗

東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

■どのようなケースにおいても７７勝以上のチームが現れる
➔優勝の可能性なし　需要供給を満たすフローが存在しない

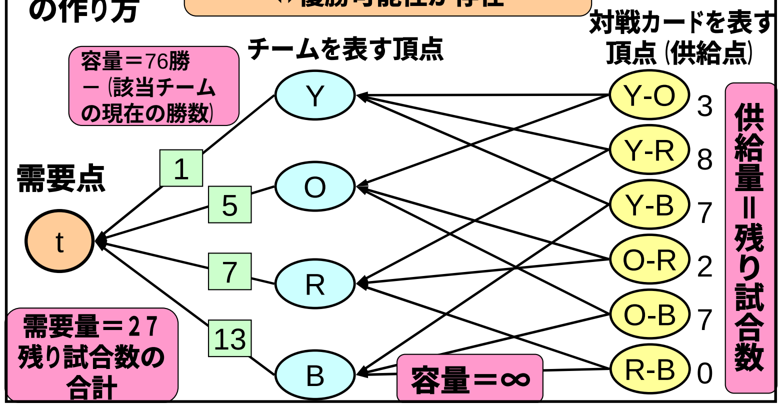
■あるケースにおいては，他チームは全て７６勝以下
➔優勝の可能性あり　需要供給を満たすフローが存在する

需要供給を満たすフローを求める問題に帰着

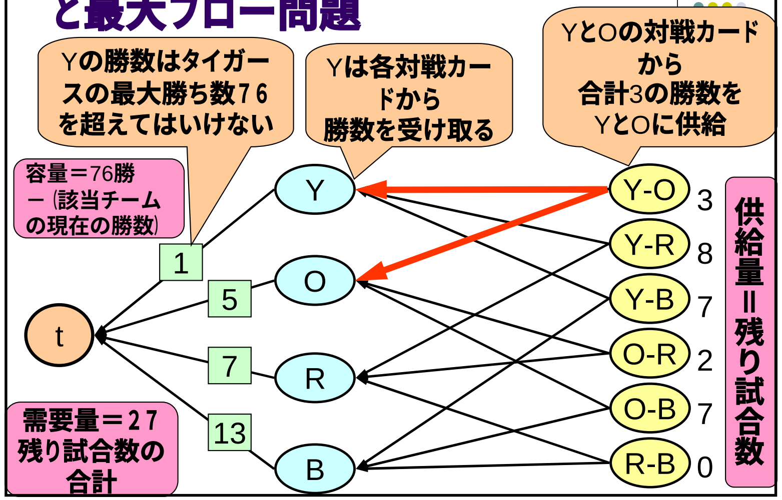
プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題

ネットワークの作り方

需要供給を満たすフローが存在
⇔優勝可能性が存在



プロ野球リーグの優勝可能性判定と最大フロー問題



演習問題（レポート提出の必要なし）

問題５：**ブルージェイズの優勝可能性を判定してみよ**