

数理計画法 第7回 ネットワーク計画

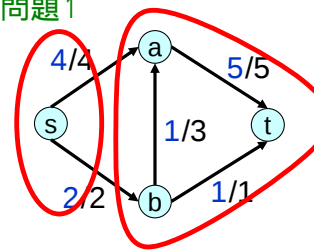
3. 最小費用フロー問題

担当： 塩浦昭義
(情報科学研究科 助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

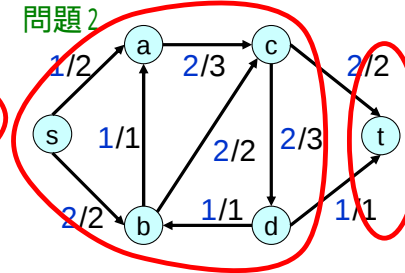
レポート問題(その1)の解答例

これらのフローに対し、残余ネットワークを書きなさい。
また、授業でやったやり方に従って最小 s-t カットを求めよ

問題1

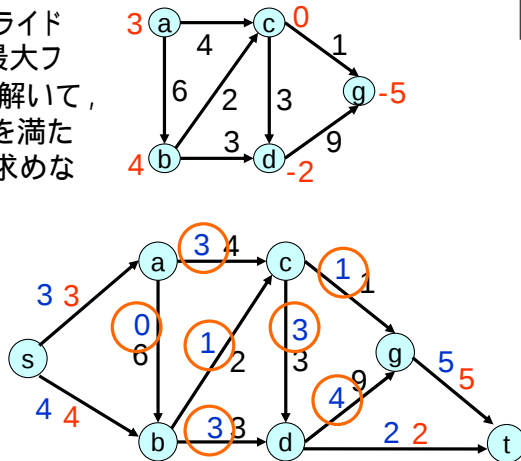


問題2



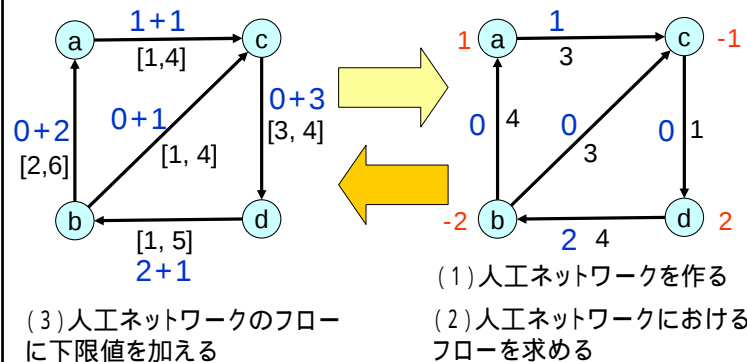
レポート問題(その2)の解答例

問題3：スライド
21枚目の最大フ
ロー問題を解いて、
供給・需要を満た
すフローを求めな
さい。



レポート問題(その2)の解答例

問題4：スライド24枚目の最大フロー問題を解いて、
上下限制約を満たすフローを求めなさい。



最小費用フロー問題

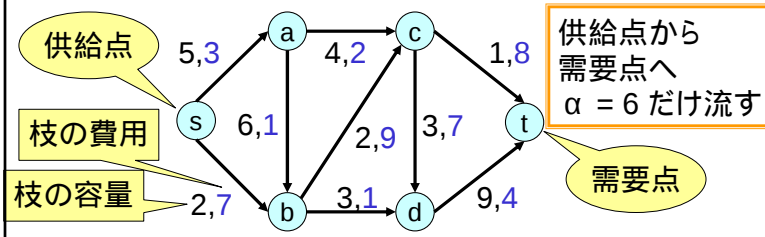
入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

需要(供給)量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$, 費用 c_{ij}

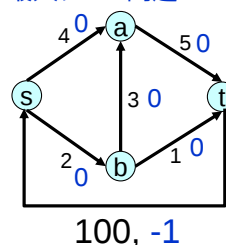
出力: 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



特殊ケースその1: 最大フロー問題

最大フロー問題は最小費用フロー問題に帰着可能

最大フロー問題

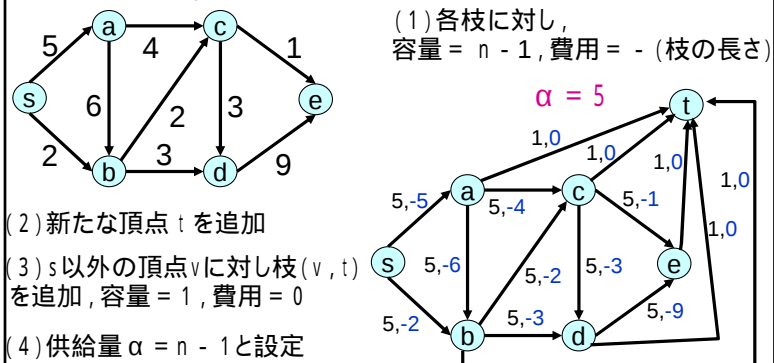


- (1) 枝 (t, s) を追加
枝の容量 = 十分に大きい値
(全ての枝の容量の合計値)
枝の費用 = -1
- (2) 元々ある枝に対し,
枝の費用 = 0
- (3) できあがった最小費用フロー問題の
最小費用 = -(最大フローのフロー値)

特殊ケースその2: 最短路問題

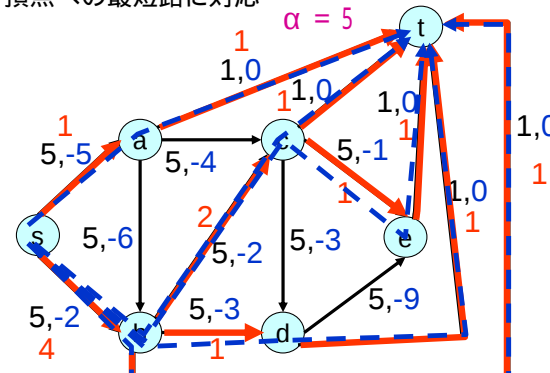
ある頂点 s から全頂点への最短路を求める問題は
最小費用フロー問題に帰着可能

数字は枝の長さ, $n = \text{グラフの頂点数}$



特殊ケースその2: 最短路問題

- (5) 最小費用フロー問題を解く
- (6) 得られたフローを $(n - 1)$ 本の s - t パスに分解
それぞれが各頂点への最短路に対応



最小費用フロー問題の定式化

最小化 $\sum \{ c_{ij} x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$

各枝の費用
× フロー量 の和

条件 $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\sum \{ x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る} \} - \sum \{ x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る} \} = 0$
($k \in V \setminus \{s, t\}$)

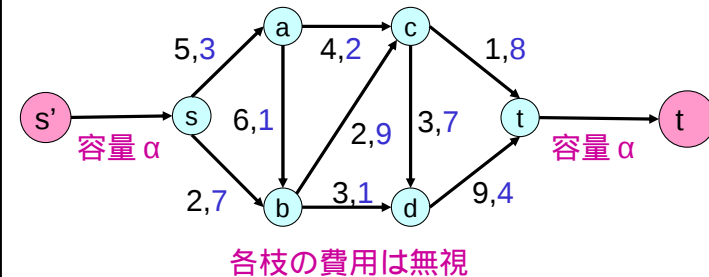
各頂点での
流量保存条件

需要供給量に
関する条件

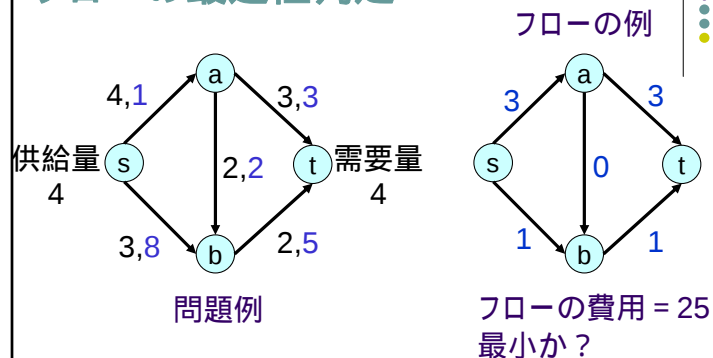
$\sum \{ x_{sj} \mid (s,j) \text{ は } s \text{ から出る} \} - \sum \{ x_{is} \mid (i,s) \text{ は } s \text{ に入る} \} = \alpha$
 $\sum \{ x_{tj} \mid (t,j) \text{ は } t \text{ から出る} \} - \sum \{ x_{it} \mid (i,t) \text{ は } t \text{ に入る} \} = -\alpha$

需要供給を満たすフローの求め方

- (1) 人工問題として最大フロー問題を作る
- (2) 人工問題の最大フローにおいて
 - $f = \alpha$ 現在のフローは需要供給を満たす
 - $f < \alpha$ 需要供給を満たすフローは存在しない



フローの最適性判定



どうやって最小費用フローであることを判定するか？
- - - 残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

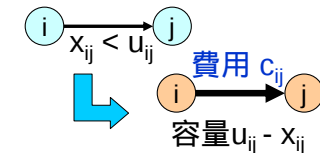
最大フローのときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$
 $E^x = F^x \cup R^x$

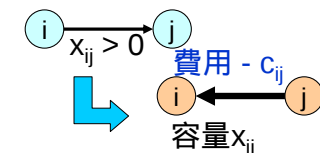
順向きの枝集合

$F^x = \{ (i,j) \mid (i,j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$
容量 $u_{ij}^x = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}

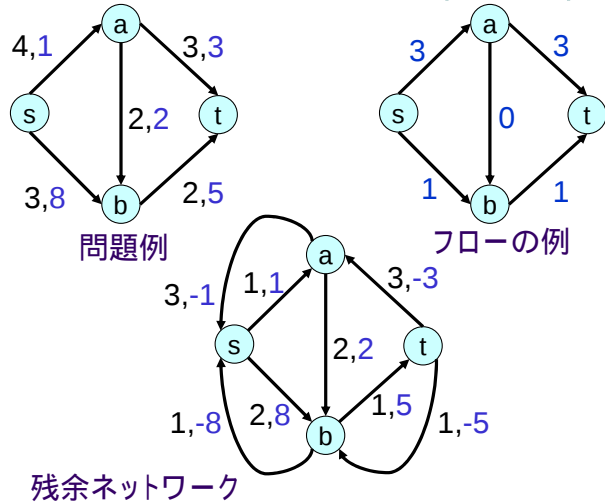


逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j,i) \mid (i,j) \in E, x_{ij} > 0 \}$
容量 $u_{ji}^x = x_{ij}$, 費用 $-c_{ij}$

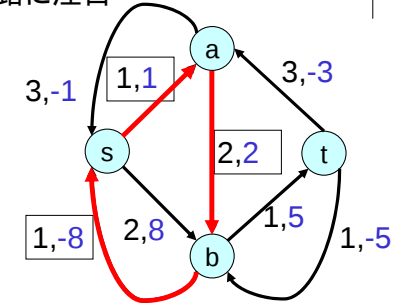


残余ネットワークの作り方(その2)



残余ネットワークの性質(その1)

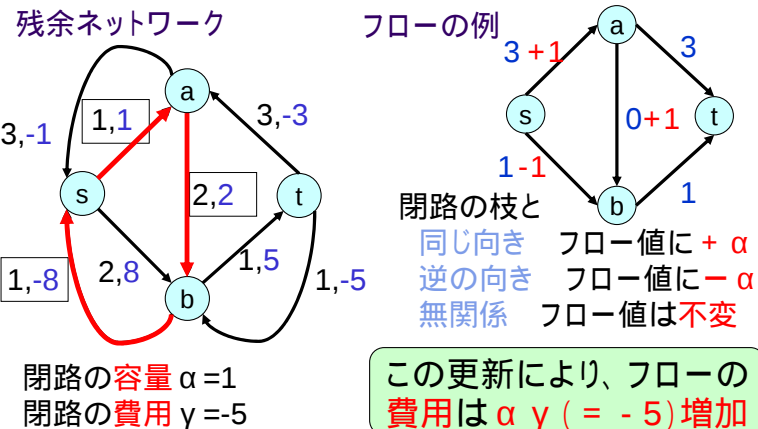
残余ネットワークの閉路に注目



閉路の容量 α
 = 閉路に含まれる枝の容量の最小値=1
 閉路の費用 γ
 = 閉路に含まれる枝の費用の和=-5

残余ネットワークの性質(その2)

残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新



残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

性質：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
 フローの費用を減少させることが可能
 現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ(証明は後で)

性質：現在のフローは費用最小でない
 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

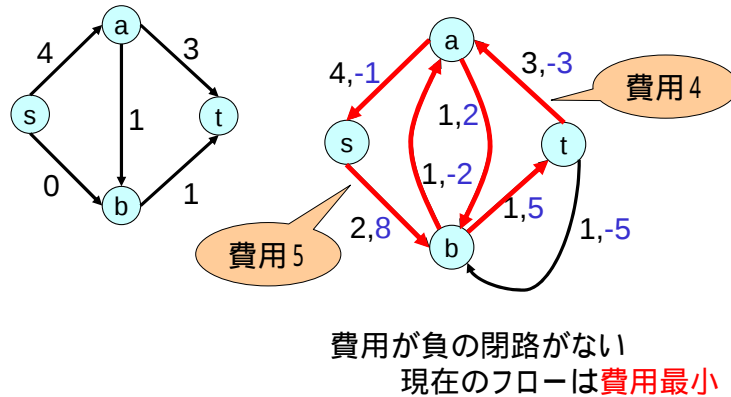
2つの性質をまとめると

定理：現在のフローは費用最小
 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー

残余ネットワーク



負閉路消去法

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0: 人工問題を解いて、需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1: 現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2: 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない 現在のフローは費用最小(終了)

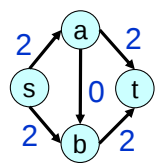
ステップ3: 残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4: ステップ1へ戻る

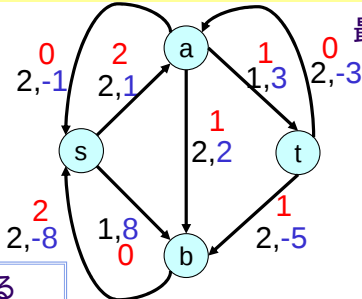
性質の証明(その1)

性質: 現在のフローは費用最小でない
残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

現在のフロー x



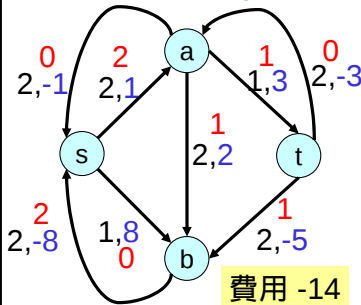
フロー x に関する
残余ネットワーク上で
 x^* と x の差を表現



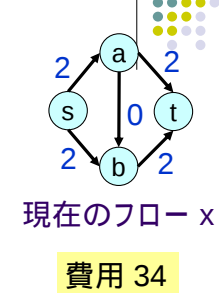
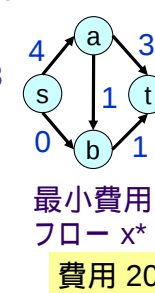
最小費用フロー x^*

$x_{ij}^* - x_{ij} = 0$ 枝 (i, j) に $x_{ij}^* - x_{ij}$
 $x_{ij}^* - x_{ij} < 0$ 枝 (j, i) に $x_{ij} - x_{ij}^*$
 その他の枝に 0

性質の証明(その2)

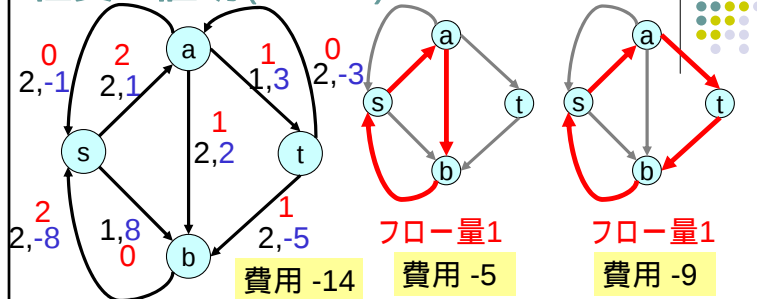


x^* と x の差:
 x に関する残余ネットワーク上で
 容量条件と流量保存則を満たす
 残余ネットワーク上の
 「フロー」



差を表す「フロー」の費用
 $= (x^* \text{ の費用}) - (x \text{ の費用})$
 < 0

性質の証明(その3)



x^* と x の差を表す「フロー」:
 x に関する残余ネットワーク上で
 容量条件と流量保存則を満たす

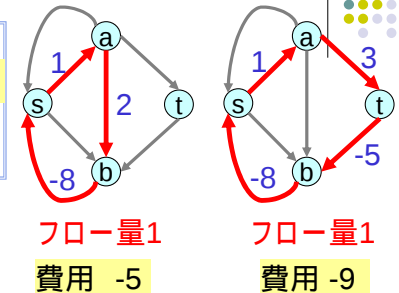
閉路上を流れる
 フローに分解可能

差を表す「フロー」の費用
 = 閉路上のフローの費用
 の合計

性質の証明(その4)

閉路上のフローの
 費用の合計 費用 -14
 = 差を表す「フロー」の費用
 < 0

閉路上を流れるフロー
 の費用
 = (閉路の費用)
 $\times$ (フロー量)



- ➡ いずれかの閉路の費用は負
- ➡ x の残余ネットワークに費用が負の閉路が存在 (証明終わり)

負閉路消去法の計算時間

各枝の容量, 費用は整数と仮定
 U = 枝容量の最大値,
 C = 枝費用の絶対値の最大値
 m = 枝の数, n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- $-mCU$ フローの費用 mCU
 ➡ 反復回数 $2mCU$ 以下
- 各反復での計算時間
 = 残余ネットワークの負閉路を求める時間
 ➡ 最短路問題のアルゴリズムを使うと $O(mn)$ 時間

計算時間は $O(m^2 n C U)$
 (入力サイズは $m + n + \log U + \log C$ なので, 指数時間)

負閉路消去法の改良

負閉路消去法の反復回数を少なくしたい
 ➡ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

(改良法1) 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
 反復回数 $O(m \log(nU))$
 ただし, 費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
 ➡ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

(改良法2)
 “(閉路の費用) / (閉路の枝数)”が最小の負閉路を選ぶ
 反復回数 $O(nm^2 \log n)$, 一回の反復 $O(nm)$
 この他にも, 負閉路消去法の計算時間を短縮する
 ための様々なテクニックが存在する

応用例：研究室配属問題(その1)

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの4人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

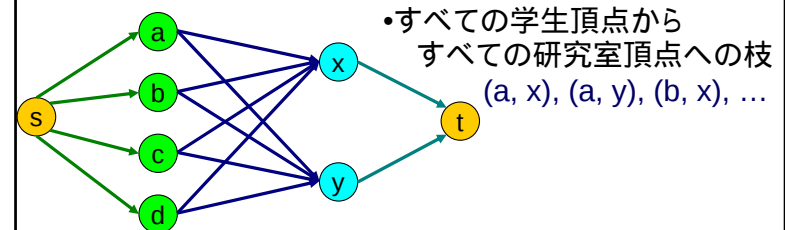
- 学生の満足度の合計を最大にしたい

満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題(その2)

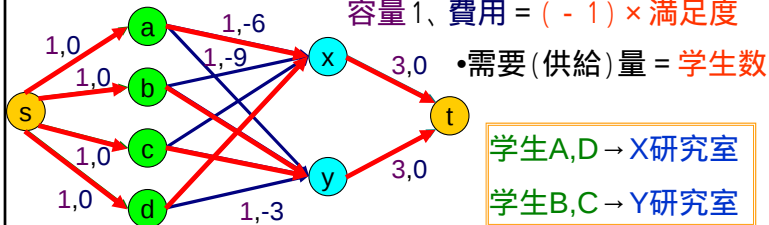
最小費用フロー問題に変形

- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d
- 各研究室に対応する頂点 x, y
- 供給点 s , 需要点 t
- 供給点から学生頂点への枝 $(s, a), (s, b), \dots$
- 研究室頂点から需要点への枝 $(x, t), (y, t)$



応用例：研究室配属問題(その3)

- 供給点から学生頂点への枝—容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝—容量 = 研究室の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝—容量1、費用 = $(-1) \times$ 満足度
- 需要(供給)量 = 学生数



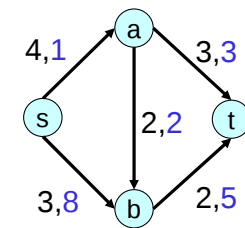
この問題の(整数値)フロー 定員を満たす配属方法
フローの費用 $(-1) \times$ 学生の満足度の合計
最小費用フロー問題に変形できた

レポート問題

次の2つの最小費用フロー問題に対して、

- 定式化せよ
- 人工問題を作って、需要供給量を満たすフローを求めよ
- 負閉路消去法を用いて最小費用フローを求めよ
(途中の計算過程も省略せず書くこと)

問題1 需要供給量4



問題2

