数理計画法　第6回

ネットワーク計画

2．最大フロー問題

3．最小費用フロー問題

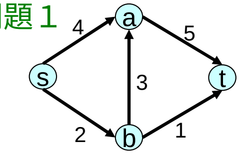
担当：　塩浦昭義

(情報科学研究科　助教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

レポート問題の解答例

問題１



最大化 f

条件 $x_{sa} + x_{sb} = f$

$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$

$x_{ab} + x_{bt} - x_{sb} = 0$

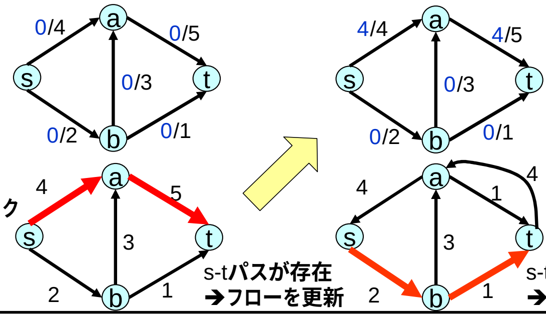
$-x_{at} - x_{bt} = -f$

$0 \leq x_{sa} \leq 4,\ 0 \leq x_{sb} \leq 2,\ 0 \leq x_{ba} \leq 3,$

$0 \leq x_{at} \leq 5,\ 0 \leq x_{bt} \leq 1$

現在の
フロー

残余
ネットワーク



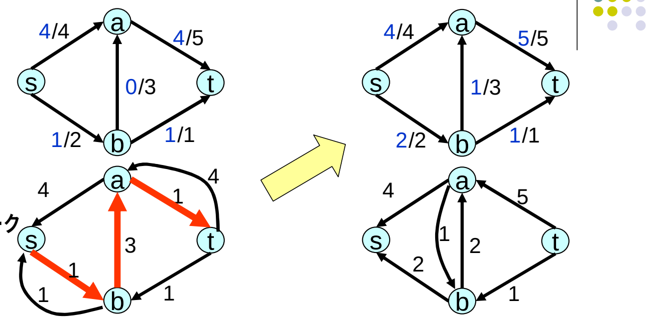
s-tパスが存在
➔フローを更新

s-tパスが存在
➔フローを更新

レポート問題の解答例

現在の
フロー

残余
ネットワーク

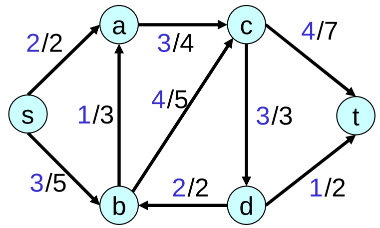


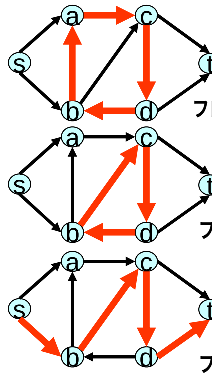
s-tパスが存在
➔フローを更新

s-tパスがない
➔現在のフローは最大
フロー値は6

レポート問題の解答例

問題３：(1) 一般に，sからtへのフローは，いくつかの
s-tパスを流れるフロー　と　サイクルを流れるフロー
に分解できる．右下のフローに対して，そのようなフローの分解を求めよ．

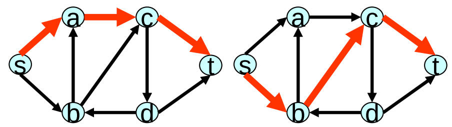




フロー量1

フロー量1

フロー量1



フロー量2　　フロー量2

復習：フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする
ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る
ステップ2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない ⇒ 終了
ステップ3：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する
ステップ4：ステップ1へ戻る

フロー増加法の計算時間

※各枝の容量は整数と仮定
U = 容量の最大値
m = 枝の数， n = 頂点の数

各反復においてフローが1以上増加
➔反復回数 ≦ 最大フロー量 ≦ m U

各反復での計算時間
= 残余ネットワークのs-t パスを求める時間
➔深さ優先探索，幅優先探索などを使うと O(m + n) 時間

∴ 計算時間は O((m+n) m U)
（入力サイズは m + n + log U なので，指数時間）

フロー増加法の改良

フロー増加法の反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での s-t パスの選び方を工夫する

(改良法１) 各反復でのフロー増加量を大きくする
➔各反復で容量最大の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 O(m log (n U))，計算時間 O(m^2 log (n U))

(改良法2) 各反復で最短の s-t パスを選ぶ
➔反復回数 O(m n)，計算時間 O(m^2n)

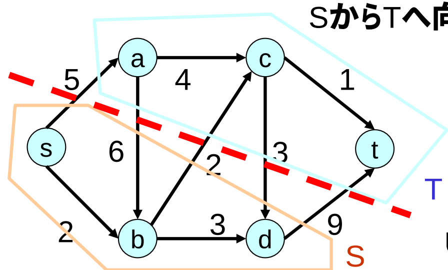
※この他にも，フロー増加法の計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

s-tカット

最大フロー問題のフロー値を上から見積もりたい

s-t カット (S, T): s ∈ S, t ∈ T,
S, T は頂点集合Vの分割 (S∩T = ∅, S∪T = V)

s-t カット (S, T) の容量U(S,T)：
SからTへ向かう枝の容量の和



U(S,T)=5+2+9=16

s-t カットの性質 (その1)

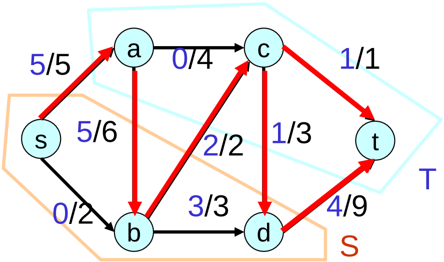
性質1：

任意のs-tカット(S, T) と任意のフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフロー量の和 x(S,T)

－ TからSへの枝のフロー量の和 x(T,S)

＝ 需要点に流れ込むフロー量 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

s-t カットの性質 (その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$

$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$

$x_{sa} + x_{sb} = f$

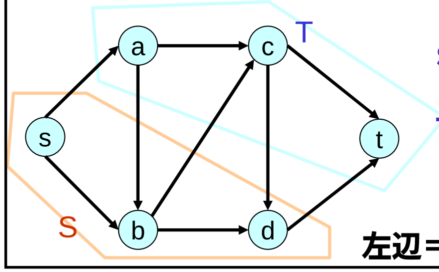
左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} **は 係数が＋1**

TからSへの枝 の変数 x_{ij} **は 係数が－1**

SからSへの枝 の変数 x_{ij} **は 打ち消される**

TからTへの枝 の変数 x_{ij} **は 登場しない**



左辺＝$(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

s-t カットの性質 (その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$\Sigma\{x_{kj}$ | (k,j) **は** k **から出る**$\}$

－ $\Sigma\{x_{ik}$ | (i,k) **は** k **に入る**$\}$ = 0　　(k ∈ S – {s})

$\Sigma\{x_{sj}$ | (s,j) **は** s **から出る**$\}$ **－** $\Sigma\{x_{is}$ | (i,s) **は** s **に入る**$\}$ = f

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が＋1**

TからSへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が－1**

SからSへの枝 の変数 x_{ij} **は打ち消される**

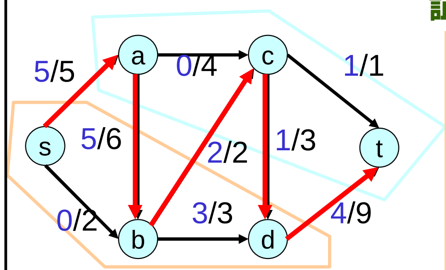
TからTへの枝 の変数 x_{ij} **は登場しない**

⇒ **左辺＝** x(S, T) – x(T, S)

s-t カットの性質 (その2)

性質2：**任意のs-tカット(S, T) とフロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し**

フロー量 f ≦ **カットの容量** U(S,T)



f = 5 ≦ 16 = U(S, T)

証明:

f = x(S, T) – x(T,S)

(性質1)

x(S, T) ≦ U(S, T)

(容量条件)

x(T, S) ≧ 0

(フローは非負)

∴ f ≦ U(S, T) – 0

= U(S, T)

最小カット問題

性質2：任意のs-tカットとフローに対し
フロー量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ カットの容量は最大フローのフロー値に対する上界を与える

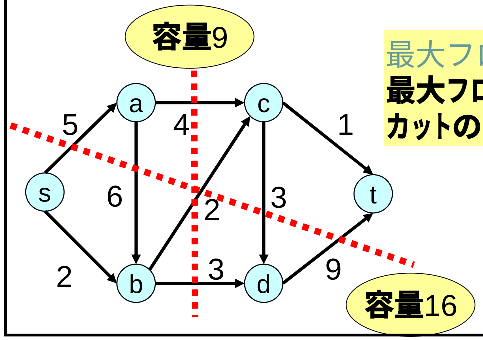
より良い上界を求めたい⇒最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット (最小カット)

最小カット問題は最大フロー問題の双対問題

最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット (最小カット)



最大フロー最小カット定理
最大フローのフロー値と最小カットの容量は等しい

以降はこの定理の証明を行う

最大フロー最小カット定理の証明 (その1)

フロー増加法で求めたフロー(x_{ij} | (i,j) ∈ E)は最大フロー

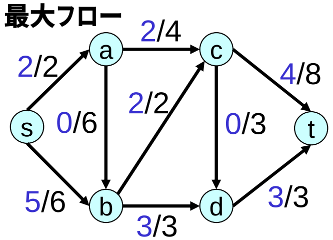
もし $f = U(S, T)$ を満たす

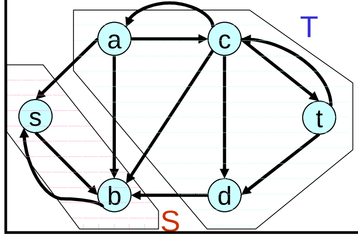
s-t カット(S, T)が存在すれば，それは最小カット

フロー増加法の終了時に、
このような s-tカットが実際に存在することを示す

最大フロー最小カット定理の証明 (その2)

最大フロー



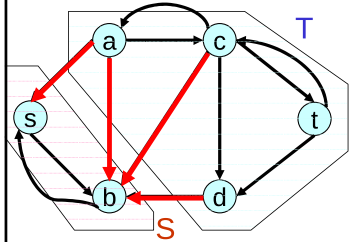


最大フローに対して残余ネットワークを作る

残余ネットワークには s-t パスが存在しない

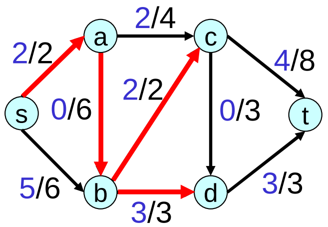
S = 残余ネットワークにおいて s から到達可能な頂点集合
T = V – S
に対し、(S, T) は s-t カット

最大フロー最小カット定理の証明（その3）



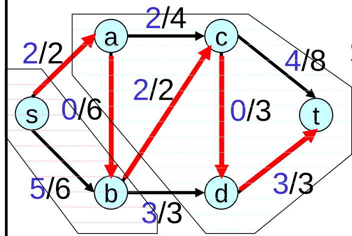
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

最大フロー最小カット定理の証明（その4）



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

x(S, T) = Σ{x_{ij} | (i,j) はSからTへ向かう枝}
= Σ{u_{ij} | (i,j) はSからTへ向かう枝}
x(T, S) = Σ{x_{ij} | (i,j) はTからSへ向かう枝} = 0
∴ x(S, T) − x(T, S) = U(S, T)

性質1より f = x(S,T) – x(T, S)

∴ f = U(S, T) （証明終わり）

最大フロー最小カット定理

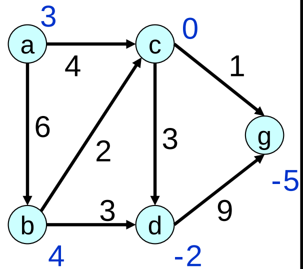
定理：フロー増加法により求められたフローは最大フロー
S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
T = V – S
とすると，(S, T) は最小s-t カット
さらに f = U(S,T) が成り立つ

最大フロー最小カット定理：
最大フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) と最小s-tカット(S,T)に対し
f ＝ U(S,T)

応用：供給・需要を満たすフローを求める

入力：有向グラフ G = (V, E)
各枝 (i, j) ∈ E の容量 u_{ij} ≧ 0
各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i （ただし b_i の和は0）
(b_i >0➔ i は供給点, b_i<0➔ i は需要点)

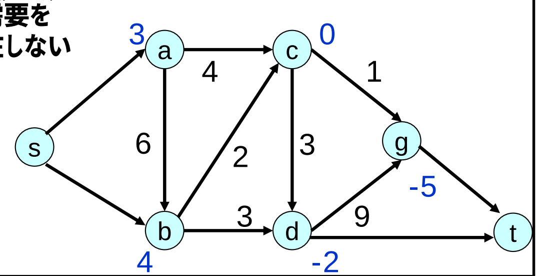
出力：次の条件を満たすフロー
●各頂点i ∈Vでの供給・需要条件
(i から流出するフロー量)
ー (i に流入するフロー量) ＝b_i
●各枝 (i, j) の容量条件
$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$



応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大フロー問題に帰着する

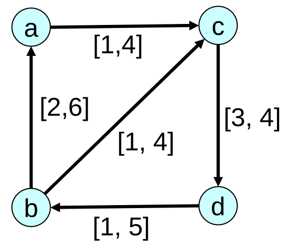
(1)新たな頂点 s (供給点) , t (需要点) を追加
(2)$b_i > 0$ ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)$b_i < 0$ ならば枝(i, t)を追加，容量は $- b_i$
(4)最大フローを求める．
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を満たすフローは存在しない



応用：上下限制約を満たすフローを求める

入力：有向グラフ G = (V, E)
各枝 (i, j) ∈ E フローの**上限値** u_{ij}, **下限値** l_{ij} ($0 \leqq l_{ij} \leqq u_{ij}$)

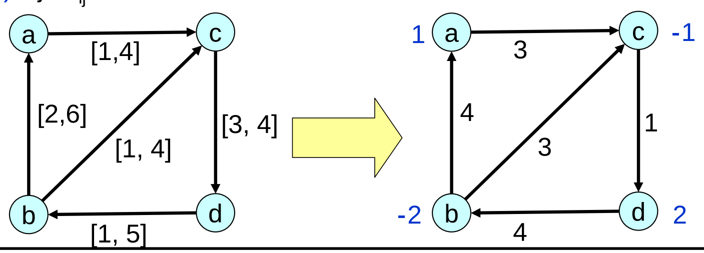
出力：次の条件を満たすフロー
●各頂点i ∈V での**流量保存条件**
(i から流出するフロー量)
ー (i に流入するフロー量) ＝0
●各枝 (i, j) の**上下限条件**
$l_{ij} \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$



応用：上下限制約を満たすフローを求める

供給・需要を満たすフロー (下限値0) を求める問題に帰着

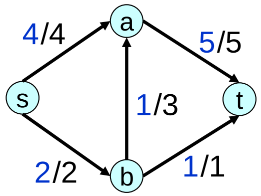
(1) 各頂点 i ∈V に対し，
b_i = (i に入る枝の下限値の和)ー (i から出る枝の下限値の和)
(2) 各枝(i, j) ∈ E に対し，**枝の容量を** $u_{ij} - l_{ij}$ とおく
(3) 得られたネットワークにて供給・需要を満たすフロー x_{ij} を求める
(4) $x_{ij} + l_{ij}$ は元のネットワークの上下限制約を満たすフロー



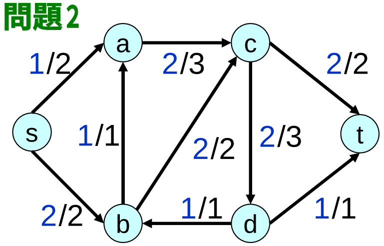
レポート問題 (その1)

下記の図は，最大フロー問題およびその最大フローを表す．
これらのフローに対し，残余ネットワークを書きなさい．
また，授業でやったやり方に従って最小 s-t カットを求めよ

問題1



問題2



レポート問題（その2）

問題3：スライド21枚目の最大フロー問題を解いて，
供給・需要を満たすフローを求めなさい．

問題4：スライド24枚目の最大フロー問題を解いて，
上下限制約を満たすフローを求めなさい．

3．最小費用フロー問題

最小費用フロー問題の定義

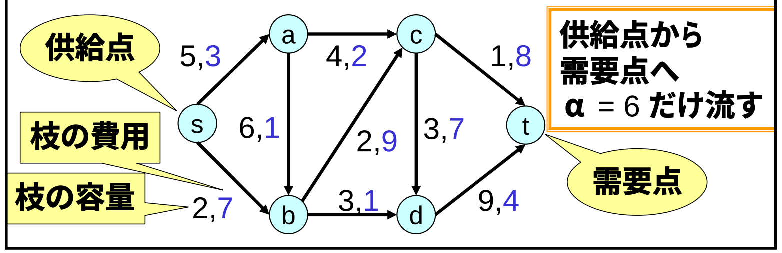
入力：有向グラフ G = (V, E)

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

需要（供給）量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



応用例：研究室配属問題（その1）

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

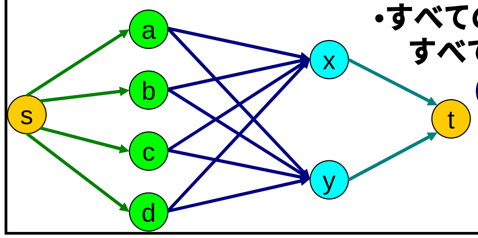
- 学生の満足度の合計を最大にしたい

満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題（その2）

最小費用フロー問題に変形

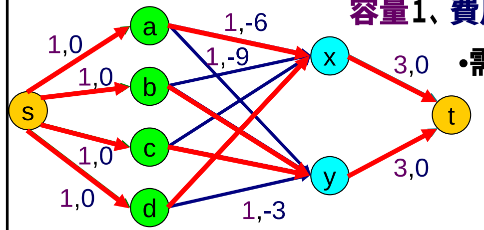
- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d
- 各研究室に対応する頂点 x, y
- 供給点 s, 需要点 t
- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)



- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例：研究室配属問題（その3）

- 供給点から学生頂点への枝ー容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝
  ー容量＝研究室の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝
  容量1、費用＝（ー1）×満足度



- 需要（供給）量＝学生数

学生A,D→X研究室
学生B,C→Y研究室

この問題の（整数値）フロー⇔定員を満たす配属方法
フローの費用⇔（ー1）×学生の満足度の合計
∴最小費用フロー問題に変形できた

最小費用フロー問題の定式化

最小化 $\Sigma\{ c_{ij}\, x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$ 　各枝の費用×フロー量　の和

条件 $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$ 　各枝の容量条件

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\} - \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$
$(k \in V - \{s, t\})$

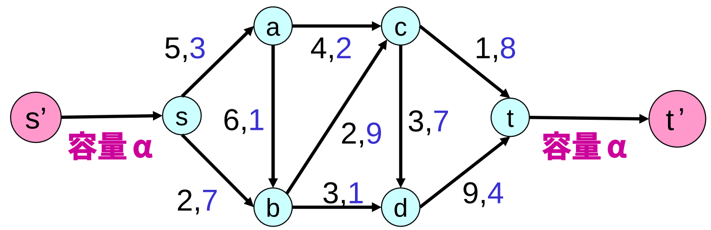
各頂点での流量保存条件

需要供給量に関する条件

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = \alpha$
$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\} - \Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -\alpha$

需要供給を満たすフローの求め方

(1) 人工問題として最大フロー問題を作る
(2) 人工問題の最大フローにおいて
　f = α ⇒ 現在のフローは需要供給を満たす
　f < α ⇒ 需要供給を満たすフローは存在しない



各枝の費用は無視