数理計画法　第5回

ネットワーク計画

ネットワーク計画問題とは？
最大フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

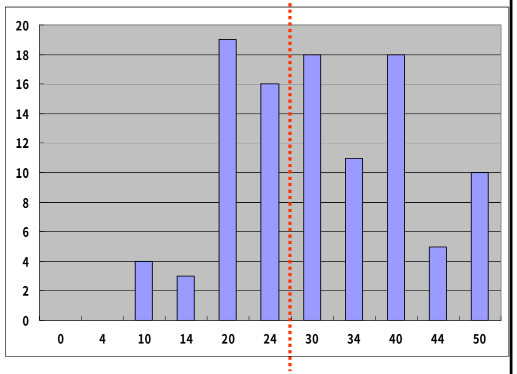
中間試験の結果について

平均点：28．2点

最高点：47点（4名）

24点以下は不合格

追試レポートを提出すること（必須）



中間試験の追試レポートについて

中間試験の結果が24点以下の学生は必ず追試レポートを提出してください．

レポートの内容：中間試験のすべての問題を完璧に解くこと

　レポート用紙は授業のホームページにあるファイルを印刷する

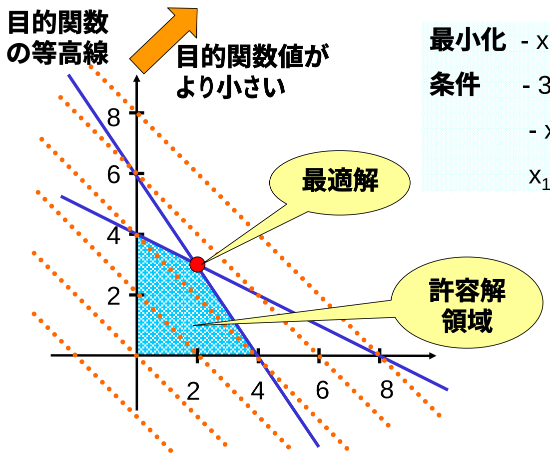
締切:１２月７日(木) 13:10まで

締切までに提出しない場合，またレポートの出来が80%以下の場合には単位は不可 とします．

レポートを提出した場合，中間試験の得点に最大5点を追加

- 中間試験の得点が20点以下　　　　　➔5点追加
- 中間試験の得点が21点以上，24点以下➔25点とする

ＬＰの幾何的なイメージ



最小化　$-x_1 - x_2$

条件　$-3x_1 - 2x_2 \geqq -12$

$-x_1 - 2x_2 \geqq -8$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

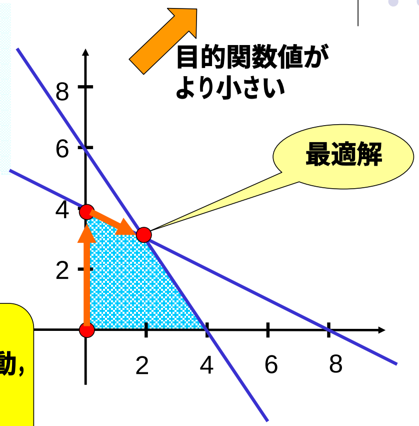
単体法の幾何的なイメージ

最小化 $-x_1 - x_2$

条件 $-3x_1 - 2x_2 \geqq -12$

$-x_1 - 2x_2 \geqq -8$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$



- 原点からスタート
- 隣り合う端点に繰り返し移動，目的関数値を減らす
- 最適解に到達

基底解の幾何的なイメージ

最小化 $-x_1 - x_2$

条件 $-3x_1 - 2x_2 \geqq -12$

$-x_1 - 2x_2 \geqq -8$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

$z = \quad - x_1 - \quad x_2$

$x_3 = 12 - 3x_1 - 2x_2$

$x_4 = \ 8 - \ x_1 - 2x_2$

基底解(**0**, **0**, 12, 8)

許容解

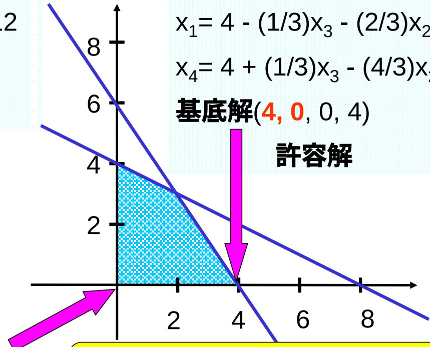
$z = -4 + (1/3)x_3 - (1/3)x_2$

$x_1 = 4 - (1/3)x_3 - (2/3)x_2$

$x_4 = 4 + (1/3)x_3 - (4/3)x_2$

基底解(**4**, **0**, 0, 4)

許容解



許容な基底解は
許容解領域の端点に対応する

基底解の幾何的なイメージ

最小化 $-x_1 - x_2$

条件 $-3x_1 - 2x_2 \geqq -12$

$-x_1 - 2x_2 \geqq -8$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

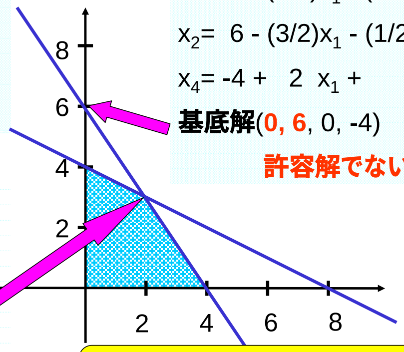
$z = -6 - (5/2)x_1 - (1/2)x_3$

$x_2 = \ 6 - (3/2)x_1 - (1/2)x_3$

$x_4 = -4 + \ 2\ x_1 + \quad x_3$

基底解(**0**, **6**, 0, -4)

許容解でない



$z = -5 + (3/4)x_3 + (1/4)x_4$

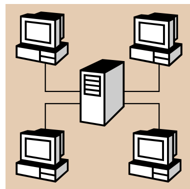
$x_1 = 2 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4$

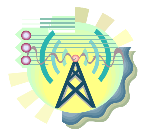
$x_2 = 3 - (1/4)x_3 - (3/4)x_4$

基底解(**2**, **3**, 0, 0)

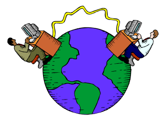
許容解

基底解は
制約の「交点」に対応する



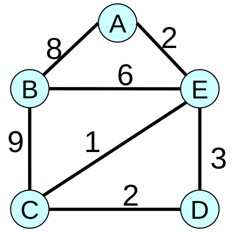


ネットワーク計画問題とは？

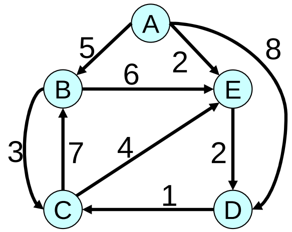


グラフとネットワーク

★（無向、有向）グラフ
頂点（接点、点）が枝（辺、弧，線）で結ばれたもの
★ネットワーク
頂点や枝に数値データ（距離、コストなど）が付加されたもの



無向グラフ



有向グラフ

ネットワーク計画問題

★ネットワーク計画問題
ネットワークに関する数理計画問題

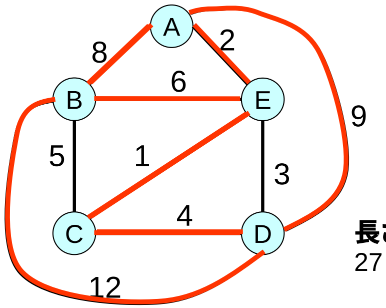
例： 最小木問題、最短路問題 ｝ 他の講義で扱う「アルゴリズムとデータ構造」「情報数学」

最大フロー問題、最小費用フロー問題 ｝ この授業で扱う

巡回セールスマン問題 ｝ 問題のみ紹介

巡回セールスマン問題

枝の長さの和が最小の巡回路を求める



長さの和
28

長さの和
27

具体例： 運搬経路問題，VLSI設計，基盤配線
ドリルでの穴あけ，など

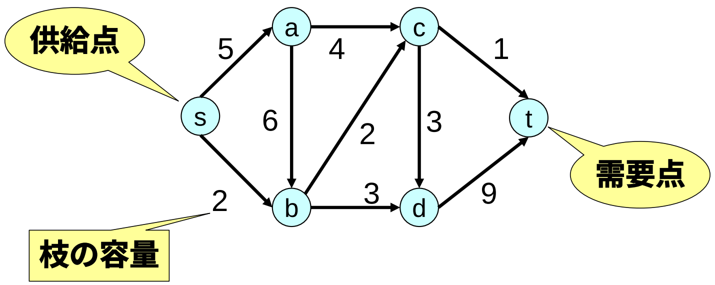
最大フロー問題

最大フロー問題の定義 (その1)

入力：有向グラフ $G = (V, E)$

供給点 $s \in V$, **需要点** $t \in V$

各枝 $(i, j) \in V$ の**容量** $u_{ij} \geqq 0$



最大フロー問題の定義 (その2)

目的：供給点から需要点に、
枝と頂点を経由して「もの」をたくさん流したい

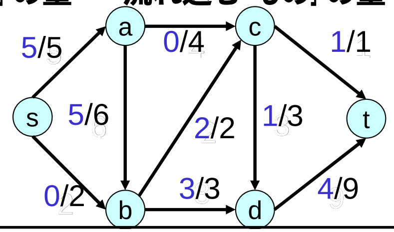
条件1 (容量条件)：

$0 \leqq$ 各枝を流れる「もの」の量 $\leqq$ 枝の容量

条件2 (流用保存条件)：

頂点から流れ出す「もの」の量＝ 流れ込む「もの」の量

与えられたネットワークと解の一例



最大フロー問題の定式化 (その1)

変数 x_{ij}： **フロー**＝枝 (i, j) を流れる「もの」の量

変数 f： **フロー量**＝需要点に流れ込む「もの」の量

(＝ 供給点から流れ出す「もの」の量)

目的：供給点から需要点に「もの」をたくさん流したい

⇒ **最大化** f

容量条件：$0 \leqq$ 各枝を流れる「もの」の量 $\leqq$ 枝の容量

⇒ $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$ 　　$((i,j) \in E)$

最大フロー問題の定式化 (その2)

流用保存条件：

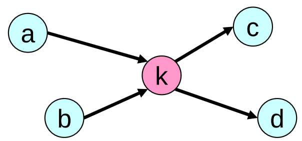
(頂点から流れ出す「もの」の量)

ー (流れ込む「もの」の量) ＝ 0

⇒ $\Sigma\{x_{kj}$ | 枝 (k,j) は 頂点 k から出る$\}$

ー $\Sigma\{x_{ik}$ | 枝 (i,k) は 頂点 k に入る$\}$ ＝ 0

$(k \in V - \{s, t\})$



$(x_{kc} + x_{kd}) - (x_{ak} + x_{bk}) = 0$

供給点と需要点に関する条件：

$\Sigma\{x_{sj}$ | (s,j) は s から出る$\}$ - $\Sigma\{x_{is}$ | (i,s) は s に入る$\} = f$

$\Sigma\{x_{tj}$ | (t,j) は t から出る$\}$ - $\Sigma\{x_{it}$ | (i,t) は t に入る$\} = -f$

最大フロー問題の定式化（その3）

定式化をまとめると

最大化　f

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$
　$- \Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$　$(k \in V - \{s, t\})$

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$
　$- \Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\}$
　$- \Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = - f$

この問題の許容解 x_{ij} ー **フロー**
フローの目的関数値 f ー **フロー値**

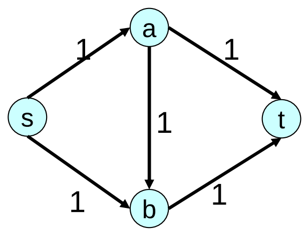
最大フロー問題の解法

最大フロー問題は線形計画問題の特殊ケース
　⇒ 単体法で解くことが可能！

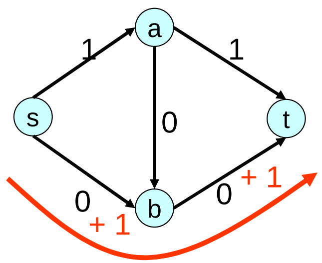
最大フロー問題は良い離散構造をもつ
　⇒ この問題専用の解法（**フロー増加法**など）
　　により、より簡単に，より高速に解くことが可能

最大フローの判定

問題の例



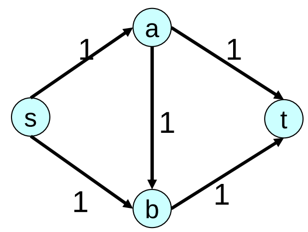
フローの例1：**最大？**



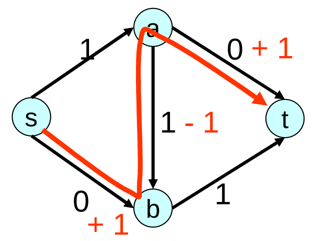
最大フローではない

最大フローの判定

問題の例



フローの例2：**最大？**



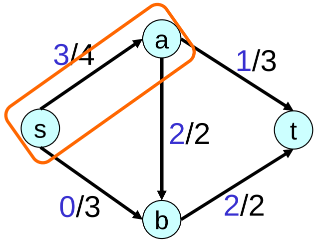
最大フローではない

最大フローであることの判定を効率よく行うには？

⇒ **残余ネットワーク**を利用

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

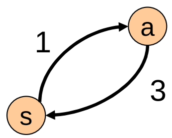
各枝のデータは

(フロー量/容量)

枝(s,a)において

☆さらに4－3＝1だけフローを流せる

⇒ 残余ネットワークに容量1の枝(s,a)を加える

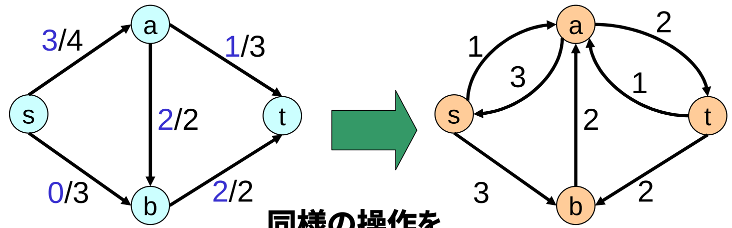


☆現在のフロー3を逆流させて0にすることが出来る

⇒ 容量3の枝(a,s)を加える

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

同様の操作を各枝に行う

残余ネットワークの完成

残余ネットワークの定義（まとめ）

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

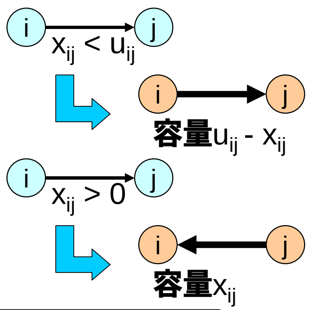
$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} < u_{ij} \}$

各枝の容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} > 0 \}$

各枝の容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$



注意！：現在のフローが変わると残余ネットワークも変わる

残余ネットワークに関する定理

定理１：残余ネットワークに s-t パスが存在する
➔ 現在のフローは増加可能

定理２：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

以下，これらの定理を証明する

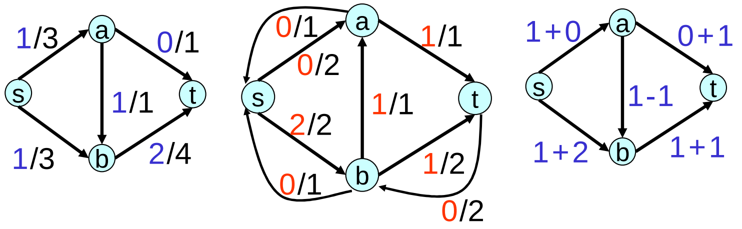
残余ネットワークの性質 (定理1)

(現在のフロー x) + (残余ネットワークのフロー y)
= (新しいフロー x’)

与えられた問題と現在のフローx

残余ネットワークとそのフローy

新しいフローx’

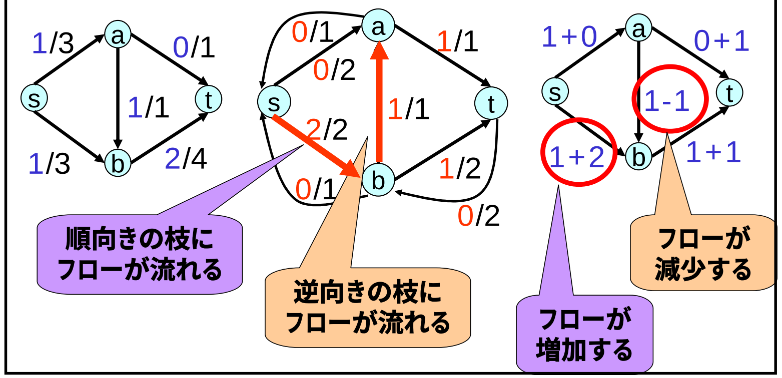


残余ネットワークの性質 (定理1)

与えられた問題と現在のフローx

残余ネットワークとそのフローy

新しいフローx’



残余ネットワークの性質 (定理1)

(現在のフロー x) + (残余ネットワークのフロー y)
= (新しいフロー x’)

(xのフロー値) + (yのフロー値) = (x’のフロー値)

残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在するとき，
現在のフローは増加可能

どうやって見つけるか？

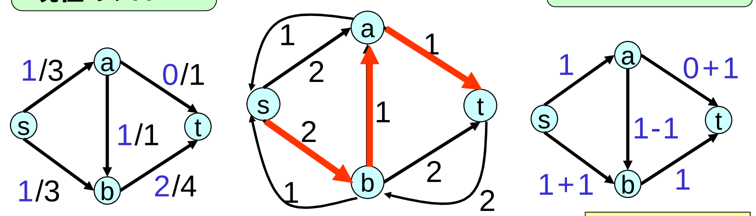
残余ネットワークの性質 (定理1)

残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

与えられた問題と現在のフローx

残余ネットワーク

新しいフローx’



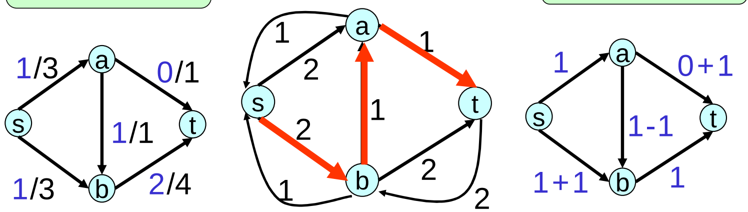
パスに沿ってフローが流せる
フロー量＝パス上の枝の最小容量

フロー値が
1増えた

残余ネットワークの性質 (定理1)

残余ネットワークにs-tパスが存在
➔残余ネットワークにフロー値＞0のフローが存在

与えられた問題と現在のフローx　　残余ネットワーク　　新しいフローx'



定理１：**残余ネットワークに s-t パスが存在する**
➔ 現在のフローは増加可能

フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

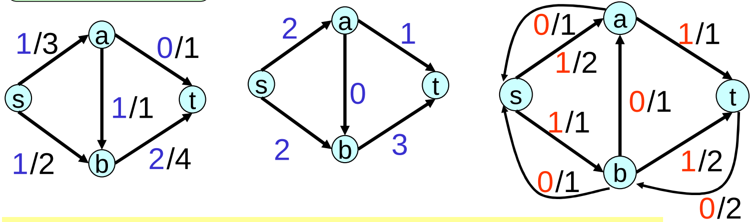
ステップ0：初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする
ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る
ステップ2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない ⇒ 終了
ステップ3：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する
ステップ4：ステップ1へ戻る

このアルゴリズムにより本当に最大フローが得られるのか？

残余ネットワークの性質 (定理2)

性質：**(別のフロー x') ー (現在のフロー x)**
＝ (残余ネットワークのフロー y)

与えられた問題と現在のフローx　　別のフローx'　　残余ネットワークとそのフローy



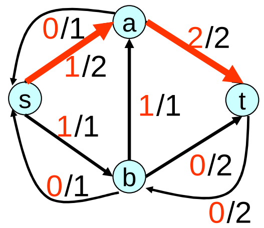
(x'のフロー値) ー (xのフロー値) ＝ (yのフロー値)

x'：最大フロー，x：最大でないフロー ➔ (yのフロー値) ＞0

残余ネットワークの性質 (定理2)

性質：**フロー値＞0のsからtへのフローが存在**
➔ネットワークにs-tパスが存在

残余ネットワークとそのフローy
フロー値＞0



直感的なイメージ (証明ではない)：
sからtへのフローが存在
➔sからフローを辿っていくと，tに辿り着くルートが存在
➔ネットワークに s-t パスが存在

残余ネットワークの性質（定理2）

性質：（別のフロー x'）－（現在のフロー x）
＝（残余ネットワークのフロー y）

x'：最大フロー，x：最大でないフロー
➔（yのフロー値）＞0

性質：フロー値＞0のsからtへのフローが存在
➔ネットワークにs-tパスが存在

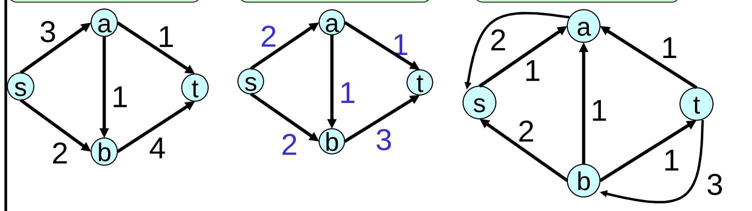
定理２：現在のフローは最大フローでない
➔ 残余ネットワークに s-t パスが存在する
（対偶）残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔現在のフローは最大フローである

残余ネットワークの性質（定理2）

定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

フロー増加法は必ず最大フローを求める！！

与えられた問題　現在のフロー　残余ネットワーク

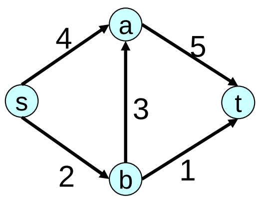


s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

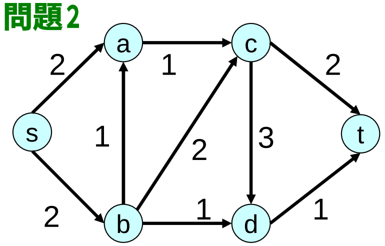
レポート問題

次の2つの最大フロー問題に対して、
（1）定式化せよ
（2）フロー増加法で最大フローを求めよ
（各反復での残余ネットワークやフローも書くこと）

問題1



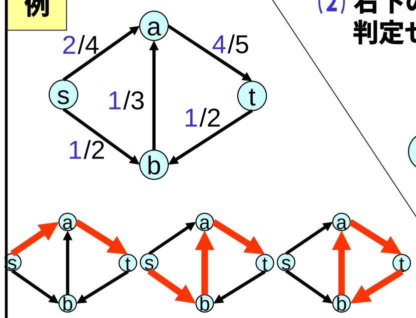
問題2



レポート問題

問題3：（1）一般に，sからtへのフローは，いくつかの
s-tパスを流れるフロー　と　サイクルを流れるフロー
に分解できる．右下のフローに対して，そのようなフローの分解を
求めよ．
（2）右下のフローが最大フローかどうか，
判定せよ．

例



フロー量：2　フロー量：1　フロー量：1