数理計画法　第4回

２．４　単体法

２．４．５　２段階単体法
２．４．７　辞書の双対性

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

中間試験について

- 日時：１１月１６日（木）午後1時より
- 受験資格者：レポートを一回以上提出した学生のみ
- 教科書等の持込は不可。
- 座席はこちらで指定する。
- 試験内容ー線形計画法の範囲（第４回目まで）

  問題の定式化，単体法，用語の説明，簡単な証明

  （詳しくはWeb上の過去問を参考にしてください）

レポート問題

- 教科書８２ページ問２．１５、問２．１６
- 講義に対する感想、意見、要望
- 締め切り：１１月１６日（木）

レポートの採点について

- 全ての問題が解いてある（多少の誤りは許す）ー 2点
- 半分以上の問題が解いてある（多少の誤りは許す）ー 1点
- 殆どの問題が解かれていない，誤りが非常に多いー 0点

先週の内容の復習

単体法　ー　LPの解法

- 最適解を求める、または非有界性を判定
- ピボット演算を繰り返し行う
- 最小添字規則の利用

  （変数の添え字が最小のものを優先して選ぶ）

⇒有限回の反復で終了

先週の復習 ー ピボット演算

許容辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z **を減らしたい**

⇒ x_1**の係数** < 0 **なので**

x_1 **を増やす**

x_1**をαだけ増やすと**

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 2$

先週の復習ーピボット演算（その2）

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ **とすると**

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、 **基底変数** $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), **非基底**(x_4, x_2, x_3)

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 \quad - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$

$x_6 = 9 \quad - 2x_4 \quad - 7x_2 \quad + 3x_3$

辞書の書き換え
（ピボット演算終了）

先週の復習 ー 最小添字規則

許容辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1, x_2, x_3 **の係数** < 0

添字が最小なのはx_1

➔x_1 **を増やす**

先週の復習ー最小添字規則

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ **とすると**

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

$x_5 = 4 \rightarrow 0$

x_4 **が添字最小**

x_4 **を基底から出す**

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 \quad - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$

$x_6 = 9 \quad - 2x_4 \quad - 7x_2 \quad + 3x_3$

2．4．2　2段階単体法

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化　$-2x_1 - x_2$

条件　$-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

実は実行不可能なLP

$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

•そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

→　単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
許容解をもたない⇒終了
許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方

元の問題 → 補助問題　　人工変数

元の問題

最小化　$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

補助問題

最小化　x_a

条件　$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

•大きなx_aに対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解

•元の問題が実行可能　⇔　補助問題の最適値＝0

•$(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

⇔　$(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方（その1）

元問題

最小化　$-x_1 - 2x_2$

条件　$-x_1 - x_2 \geqq -1$

$x_1 + x_2 \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

補助問題

最小化　x_a

条件　$-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$

$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

初期辞書

$z_a = x_a$

$z = -x_1 - 2x_2$

$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$

$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない

補助問題の解き方 (その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad x_a\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a\\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

x_a と x_4 を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4\\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

補助問題の解き方 (その3)

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4\\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a\\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4\\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4\\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a = 0$ ⇒ 元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- x_a が非基底変数

  ⇒ 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方 (その4)

最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4\\
z &= 0 - x_1 - 2x_2\\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4\\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_3 を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\\
z &= -1 + \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_4\\
x_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4
\end{aligned}
$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方 (その5)

最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\\
z &= -1 + \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_4\\
x_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4
\end{aligned}
$$

係数が非ゼロの変数と x_a を入れ替え

x_3 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a\\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4\\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4\\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4
\end{aligned}
$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4\\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4\\
x_3 &= 0 - x_4
\end{aligned}
$$

2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$z = -1 - x_2 - x_4$
$x_1 = 1 - x_2 + x_4$
$x_3 = 0 \quad - x_4$

x_2 と x_1 を入れ替え →

$z = -2 + x_1 - 2x_4$
$x_2 = 1 - x_1 + x_4$
$x_3 = 0 \quad - x_4$

x_4 と x_3 を入れ替え →

$z = -2 + x_1 + 2x_3$
$x_2 = 1 - x_1 - x_3$
$x_4 = 0 \quad - x_3$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

2段階単体法の流れ

- 入力：不等式標準形のLP

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、
  元問題の実行可能性を調べる
  許容解をもたない ⇒ 終了
  許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用
  非有界 ⇒ 終了
  有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ (基本定理)

2.4.7 辞書の双対性

主問題の辞書と双対問題の辞書の関係
→ 双対定理の証明

主問題 → **主問題の辞書**

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$
条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$
$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

$z = 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$
$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$
$\cdots$
$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0$ (i = 1,…,m)
最適⇔ $c_j \geqq 0$ (j = 1,…,n)

双対問題の辞書

双対問題 → **双対問題の辞書**

最大化 $b_1y_1+\cdots+b_my_m$
条件 $a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$\cdots$
$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$
$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

最大化 w
条件 $w = 0 + b_1y_1+\cdots+b_my_m$
$y_{m+1} = c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m$
$\cdots$
$y_{m+n} = c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m$
$y_1 \geqq 0, \ldots, y_{m+n} \geqq 0$

双対問題の辞書が許容⇔$c_j \geqq 0$ (j = 1,…,n)
最適⇔$b_i \leqq 0$ (i = 1,…,m)

2つの辞書の比較(その1)

主問題の辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n\\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\
&\cdots\\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

双対問題の辞書

$$
\begin{aligned}
w &= 0 + b_1y_1+\cdots+b_my_m\\
y_{m+1} &= c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m\\
&\cdots\\
y_{m+n} &= c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha & c_1 & \cdots & c_n\\
-b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\
 & & \cdots & \\
-b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\alpha & b_1 & \cdots & b_m\\
c_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{m1}\\
 & & \cdots & \\
c_n & -a_{1n} & \cdots & -a_{mn}
\end{array}
$$

行列を転置して一部の符号を反転

2つの辞書の比較(その2)

主問題の辞書

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha + c_1x_1+\cdots+c_nx_n\\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\
&\cdots\\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

双対問題の辞書

$$
\begin{aligned}
w &= \alpha + b_1y_1+\cdots+b_my_m\\
y_{m+1} &= c_1 - a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m\\
&\cdots\\
y_{m+n} &= c_n - a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m
\end{aligned}
$$

主問題の辞書が許容⇔$b_i \leqq 0\ (\forall i)$

⇔双対問題の辞書が最適

主問題の辞書が最適⇔$c_j \geqq 0\ (\forall j)$

⇔双対問題の辞書が許容

双対定理の証明

主問題に最適解が存在

⇒ 主問題の許容かつ最適な辞書が存在

$b_i \leqq 0\ (\forall i)$, $c_j \geqq 0\ (\forall j)$

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha & c_1 & \cdots & c_n\\
-b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\
 & & \cdots & \\
-b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

対応する双対問題の辞書を作成

⇒ 許容かつ最適な辞書になっている

⇒ 双対問題に最適解が存在、

目的関数値は共にα

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha & b_1 & \cdots & b_m\\
c_1 & -a_{11} & \cdots & -a_{m1}\\
 & & \cdots & \\
c_{mn} & -a_{1n} & \cdots & -a_{mn}
\end{array}
$$

「双対問題の双対は主問題に一致」の証明

主問題

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

その双対問題

最大化 $b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件 $a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

「双対問題の双対は主問題に一致」の証明

双対問題を不等式標準系に書き換える

最小化 $-b_1y_1 - \cdots - b_my_m$

条件 $-a_{11}y_1 - \cdots - a_{m1}y_m \geqq -c_1$

$\cdots$

$-a_{1n}y_1 - \cdots - a_{mn}y_m \geqq -c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

上記のLPの双対問題 を作る

最大化 $-c_1x_1 - \cdots - c_nx_n$

条件 $-a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n \leqq -b_1$

$\cdots$

$-a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n \leqq -b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

左のLPを不等式標準系に書き換えると 主問題に一致