数理計画法　第3回

2．3　諸定理
2．4　単体法

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

復習：主問題と双対問題

主問題	双対問題
最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$	最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$
条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$	条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$	$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$
$\cdots$	$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$	$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$	$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

主問題の i 番目の不等式 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqq b_i$ ⇔ 対応 ⇔ 双対問題の i 番目の変数 $y_i \geqq 0$

主問題の j 番目の変数 $x_j \geqq 0$ ⇔ 対応 ⇔ 双対問題の j 番目の不等式 $a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\cdots+a_{mj}y_m \leqq c_j$

復習：弱双対定理

弱双対定理
x: 主問題の許容解, y: 双対問題の許容解

xの目的関数値 $\Sigma_j c_j x_j \geqq \Sigma_i b_i y_i$ yの目的関数値

弱双対定理の系（その1）

系2．2
x: 主問題の許容解, y: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒　x: 主問題の最適解, y：双対問題の最適解

証明　→　前回のレポート問題

弱双対定理の系（その2）

系2．1
主問題が**非有界** ⇒ 双対問題は**実行不可能**
双対問題が**非有界** ⇒ 主問題は**実行不可能**

証明: 対偶 （双対：実行可能⇒主：有界） を示す
双対問題が実行可能と仮定

y： 双対問題の許容解、 $\alpha = \Sigma b_i y_i$
弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha$ ∴ 主問題は有界

双対定理

定理2．3：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ (双対定理)	× (系2．1)	× (双対定理)
		非有界	× (系2．1)	× (系2．1)	○ (系2．1)
	実行不可能		× (双対定理)	○ (系2．1)	○

相補性定理

定理2．4：
x: 主問題の許容解, y: 双対問題の許容解

x、y は最適解

相補性条件

各 $j = 1, \ldots, n$ について
$\Sigma_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立
各 $i = 1, \ldots, m$ について
$\Sigma_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理

x: 主問題の許容解　　y: 双対問題の許容解

x、y は最適解

$\Updownarrow$

$\Sigma_i a_{ij} y_i = c_j$ または $x_j = 0$ ($\forall j = 1, 2, \ldots, n$)

$\Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$ または $y_i = 0$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, m$)

証明:　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適 ⇔ 最初の項＝最後の項

⇔ $(\Sigma_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\Sigma_j a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$ ⇔ 相補性

2．4　単体法

- ＬＰの最適解を求める
- 許容基底解を更新、目的関数値をより小さくする
- 有限解の繰り返しで終了

辞書（その1）

問題の変形

不等式標準形 ⇒ 一種の等式標準形

最小化 $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化 z

条件 $z = 0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる → 辞書

辞書（その2）

問題の変形

不等式標準形 ⇒ 一種の等式標準形

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

最小化 z

条件 $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$z = 0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$

非基底（変数）：右辺の変数

基底（変数）：左辺に表れる変数

基底解ー非基底変数を0としたときの解（許容とは限らない）

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$
$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

➡ **基底解は**(0,0,0,4,4,1)

辞書に関する用語（その2）

許容辞書ー対応する基底解が許容解の辞書
⇔ 基底解の各成分が非負

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

基底解＝(0,0,0,4,4)
⇒ **許容辞書**

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$

基底解＝(0,0,0,-4,4)
⇒ **許容辞書ではない**

辞書の行列表現
右辺の係数だけを書き出す

0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

基底解の更新方法 ー ピボット演算

許容辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$
$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)
目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z **を減らしたい**
⇒ x_1**の係数** < 0 **なので**
x_1 **を増やす**

x_1**をαだけ増やすと**
目的関数値 $z = -2\alpha$
解は
$(\alpha, 0, 0, 4-2\alpha, 4-2\alpha, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには
$\alpha \leqq 2$

ピボット演算（その2）

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$
$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$
$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 = 0 \to 2$ **とすると**
解は(2,0,0,0,0,9)，$z = -4$
とくに、基底変数 $x_4 = 4 \to 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6)，**非基底**(x_4, x_2, x_3)

$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$
$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$
$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$
$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$

x_1**を基底に入れる**
x_4**を基底から出す**

辞書の書き換え
（ピボット演算終了）

ピボット演算2回目 (その1)

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$

$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 \quad + 3x_3$

z を減らしたい

⇒ x_3の係数 < 0 なので

x_3 を増やす

基底解(2,0,0,0,0,9)

目的関数値 z = -4

x_3をαだけ増やすと

目的関数値 z = - 4 - 2α

解は

(2 +(½) α ,0, α ,0,0 −5 α ,9+3 α)

許容性を満たすためには

α≦0

ピボット演算2回目 (その2)

$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$

$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$

$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 \quad - 5x_3$

$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 \quad + 3x_3$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), z = - 4

とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_3, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_5)

x_3を基底に入れる

x_5を基底から出す

$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

ピボット演算に関する用語

- 1回目のピボット演算

  基底解 (0,0,0,4,4,1) → (2,0,0,0,0,9)

  非退化ー基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

  基底解 (2,0,0,0,0,9) → (2,0,0,0,0,9)

  退化ー基底解が変化しない

最適性の判定

$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

⇩

任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geqq -4$

⇩

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は z = -4 なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 + 2x_1 \qquad - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1**の係数** = -2 < 0 **なので**

x_1 **を増やす** ⇒ z **が減る**

x_1**をαを増やすと**

解は

(α,0,0,4+2α,4+2α,1+4α)

目的関数値 $z = -2\alpha$

αを任意に増やしても解は許容

⇒ **非有界**

単体法の流れ

- **入力:許容辞書(および基底)**
- **出力:有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。**

ステップ1:最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 x_s **にする**

ステップ2:非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s **をどれだけ増やせるか計算**

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒x_s **を最大限増やしたときに0に減少する**

基底変数を基底から出る変数 x_t **にする**

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

単体法の問題点

- **反復回数は有限回か?**

巡回 ー 同じ辞書が繰り返し現れること

- **初期辞書が許容でない場合はどうする?**

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

⇒

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

最小添字規則

ピボット演算のとき、**最小添字規則**を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

			x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: $0 \to 0 - 2\alpha$

x_5: $0 \to 0 - 3\alpha$

x_6: $0 \to 0 + 5\alpha$

∴ α は最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意：x_6 は増加するので、出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例（つづき）

入る変数の候補

出る変数の候補

			x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	
z	0	1/2	3/2	-1/2
	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

今週のレポート問題

- 教科書81ページ問2．11
- 教科書81ページ問2．12
- 教科書82ページ問2．14
- 次のLP（許容辞書）を単体法で解け

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

締め切りは　11月2日（木）