

数理計画法 第2回

2.1 線形計画問題とその標準形

2.2 双対問題

担当: 塩浦昭義

(情報科学研究科 助教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



先週の内容の復習

線形計画問題 (LP)

- 目的関数が線形関数, 制約式も線形式の最適化問題

- LPの**不等式標準形** ◆ 目的は**最小化**
 - ◆ 制約式は「**左辺** **右辺**」の形
 - ◆ 各変数は**非負**

最小化 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

...

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$



不等式標準形への変形

命題 2.1: 任意の LP は不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b$$

【目的関数の -1倍】 最大化から最小化へ

$$\text{最大化 } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \longrightarrow \quad \text{最小化 } -\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

【制約の -1倍】 不等式を“ \leq ”から“ \geq ”へ

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad \longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq -b$$



不等式標準形への変形

【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

$$x_j \text{ (非負制約なし)} \quad \longrightarrow \quad x_j = x_{j1} - x_{j2}, \quad x_{j1} \geq 0, \quad x_{j2} \geq 0$$



不等式標準形への変形の例

最大化 $3x + 2y$

条件 $x + y = 1$

$x \geq 0$



最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $x + (y_1 - y_2) \leq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件 $-x - (y_1 - y_2) \leq -1$

$x + (y_1 - y_2) \leq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$



「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j (非負制約なし) $\longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$

変換前の問題: P_1

変換後の問題: P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)$: P_1 の許容解
 $\longrightarrow (s_1, \dots, s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_n)$: P_2 の許容解, 目的関数値同じ
 ただし $s_{j1} = s_j, s_{j2} = 0$ ($s_j \geq 0$ のとき)
 $s_{j1} = 0, s_{j2} = -s_j$ ($s_j < 0$ のとき)

例: $(x, y) = (3, -2)$ は $x + y = 1, x \geq 0$ を満たす

$(x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geq 0$ を満たす



「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j (非負制約なし) $\longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$

変換前の問題: P_1

変換後の問題: P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(t_1, \dots, t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_n)$: P_2 の許容解
 $\longrightarrow (t_1, \dots, t_{j1} - t_{j2}, \dots, t_n)$: P_1 の許容解, 目的関数値同じ

例: $(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geq 0$ を満たす

$(x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は $x + y = 1, x \geq 0$ を満たす



等式標準形

- LPの等式標準形

◆ 目的は**最小化**

◆ 制約は**等式**

◆ 各変数は**非負**

最小化 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

...

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$



等式標準形への変形

命題 2.2: 任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる (命題 2.1)
- 不等式「左辺 右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数 x_{n+i} を利用
(スラック変数)

$$\begin{array}{r} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \quad -1 \\ x_1 \quad 0, x_2 \quad 0, x_3 \quad 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 \quad 0, x_2 \quad 0, x_3 \quad 0, x_4 \quad 0 \end{array}$$

双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい
(最適値の下界値の計算)

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$ \longrightarrow 制約を足し合わせてみる

$$\begin{array}{r} \text{条件} \quad -2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad -4 \\ \quad \quad -2x_1 \quad \quad -4x_3 \quad -4 \\ \quad \quad \quad 4x_1 - 3x_2 + x_3 \quad -1 \\ x_1 \quad 0, x_2 \quad 0, x_3 \quad 0 \end{array}$$

• 目的関数 $\times 3 + \quad = -2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \quad -13$

• 目的関数 $\times 0.5 + \quad \times 0.5 = -2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \quad -4$

より良い
下界

双対問題

より一般に, 非負実数

y_1, y_2, y_3 を使うと

$$\times y_1 + \quad \times y_2 + \quad \times y_3$$

左辺: $(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$

右辺: $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left. \begin{array}{r} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \quad -2 \\ -2y_1 \quad \quad -3y_3 \quad -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 \quad -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{が成り立つならば} \\ \text{目的関数 左辺 右辺} \\ = -4y_1 - 4y_2 - y_3 \end{array}$$

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad -4$

$-2x_1 \quad -4x_3 \quad -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \quad -1$

$x_1 \quad 0, x_2 \quad 0, x_3 \quad 0$

双対問題

最も大きな下界値を求めたい 新たなLP

$$\begin{array}{r} \text{最大化} \quad -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} \quad -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \quad -2 \\ \quad \quad -2y_1 \quad \quad -3y_3 \quad -1 \\ \quad \quad \quad y_1 - 4y_2 + y_3 \quad -1 \\ y_1 \quad 0, y_2 \quad 0, y_3 \quad 0 \end{array}$$

もとの問題に
対する
双対問題

もとの問題 主問題

主問題と双対問題

主問題

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

双対問題

最大化 $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

条件 $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$

...

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

最小化 $c^T x$

条件 $Ax \leq b$

$x \geq 0$

行列表現

最大化 $b^T y$

条件 $A^T y \leq c$

$y \geq 0$

主問題と双対問題

性質: 双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明 レポート問題

手順 (1) 双対問題を不等式標準形に書き換え

(2) 書き換えた問題の双対問題をつくる

(3) 得られた双対問題を変換すると

もとの問題に一致することを確認する。

等式標準形の双対問題

- LPの等式標準形

最小化 $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\dots,m)$

$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)$

不等式標準形に
変換

最小化 $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i=1,2,\dots,m)$

$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)$

等式標準形の双対問題

双対問題
をつくる

最大化 $\sum_{i=1}^m b_i y_i' + \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i''$

条件 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) y_i'' \leq c_j \quad (j=1,2,\dots,n)$

$y_i' \geq 0, y_i'' \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m)$

最大化 $\sum_{i=1}^m b_i y_i$

条件 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j=1,2,\dots,n)$

$y_i' - y_i''$ を
非負制約なし変数
 y_i に置き換え

等式標準形のLPに対する双対問題

諸定理 — LPの基本定理

定義: 不等式標準形のLPに対し

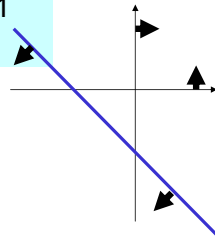
- **実行可能** 許容解が存在する
- **実行不可能** 許容解が存在しない

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \leq -3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

実行可能
(1, 1)は許容解

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

実行不可能



LPの基本定理(その2)

定義: 実行可能なLPは (最小化の場合)

- **有界** 任意の許容解の目的関数値が
ある定数より大きい
- **非有界** 目的関数値をいくらでも小さく出来る

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \leq -3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

有界
目的関数値 0

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x - y \\ \text{条件} & x + y \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

非有界
任意の $\epsilon > 0$ に対し (,) は許容解
目的関数値 = $-\epsilon$

LPの基本定理(その3)

定理 2.1 (基本定理)

任意のLPに対し、

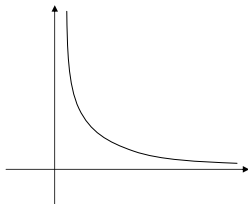
実行可能かつ有界 最適解が存在

非線形計画の場合は成り立つとは限らない!

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & y \\ \text{条件} & xy \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

最適値 = 0

でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理(その1)

定理 2.2 (弱双対定理)

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

弱双対定理 (その2 証明)

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

最小化 $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

条件

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & b_2 \\ & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & b_m \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最大化 $b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$

条件

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m & c_1 \\ a_{12}y_1 + \dots + a_{m2}y_m & c_2 \\ & \dots \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m & c_n \end{aligned}$$

$y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

弱双対定理 (その4 - 系)

系 2.2

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

x : 主問題の最適解, y : 双対問題の最適解

証明 レポート問題

弱双対定理 (定理 2.2) を使って証明すること

弱双対定理 (その3 - 系)

系 2.1

主問題が非有界 双対問題は実行不可能
双対問題が非有界 主問題は実行不可能

証明: 対偶 (双対: 実行可能 主: 有界) を示す
双対問題が実行可能と仮定

y : 双対問題の許容解, $\quad = \quad b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$c_j x_j \quad \quad \quad$ 主問題は有界

弱双対定理 (その5 - 系)

例 2.3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + x_3 & -4 \\ -2x_1 & -4x_3 & -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 & -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件

$$\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 & -2 \\ -2y_1 & -3y_3 & -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 & -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解 $\quad y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$

系 2.2 より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理 2.3:

主問題または双対問題が最適解をもつ
他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 後日

今週のレポート問題

- 80ページ問 2.1
- 81ページ問 2.4
- 双対問題の双対問題が主問題に一致することを示せ.
- 81ページ問 2.8 (系 2.2 の証明)

締め切り **10月25日(木)**

提出は授業開始後 10 分以内に.

それ以降は受け取りません.

情報科学研究科の私の研究室に持ってきても OK.

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	(双対定理)	× (系 2.1)	× (双対定理)
		非有界	× (系 2.1)	× (系 2.1)	(系 2.1)
	実行不可能	× (双対定理)	(系 2.1)		